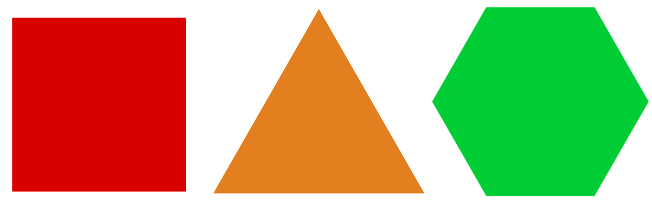
Mosaicos para guarderías y escuelas primarias



Participantes:

Edad: a partir de 4 años
Sin requisitos matemáticos previos

Preparativos

Imprime **[las fichas]** varias veces en papel o cartulina fina de color y recorta las piezas. Dependiendo de la edad de los participantes, puedes elegir primero una de las formas más sencillas de pieza (cuadrado o rectángulo). Una cuchilla puede ayudar a hacer cortes rápidos y precisos; asegúrate de ayudar a los participantes más jóvenes. Puedes utilizar papeles de distintos colores para crear combinaciones únicas.

Actividad 0:

El profesor distribuye las piezas (sección 1 de la hoja de fichas) entre los participantes y les pide que coloquen las piezas de una forma determinada unas junto a otras sin dejar espacio entre ellas y sin que las piezas se superpongan (en lenguaje matemático, esto se llama "teselar el plano"). Las fichas proporcionan soluciones.

Actividad 1:

¿Puedes adivinar las condiciones de los ángulos que lo hacen posible o imposible? Por ejemplo, hay exactamente una forma para la que la teselación es imposible. ¿Puedes adivinar cuál?

Actividad 2:

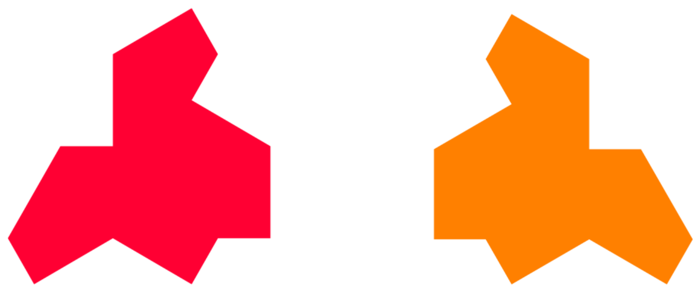
Observa las teselaciones del plano que has producido y convéncete de que podrías extenderlas hasta el infinito en cualquier dirección. Observa que el mosaico crea un patrón que se repite en dos direcciones. En cada una de esas direcciones hay una distancia tal que si mueves el mosaico esa distancia en la dirección dada, puedes superponerlo al mosaico original (por supuesto, imaginando que el mosaico es infinito).

Actividad 3:

Da la vuelta a algunas de las formas e intenta superponerlas con las formas originales. Se dice que la forma invertida es la *imagen especular* de la forma original. ¿Para qué formas no se puede superponer la imagen especular de una pieza? Para estas formas, ¿es posible teselar el plano utilizando copias tanto de la pieza como de su imagen especular?

Actividad 4:

Esta nueva forma, llamada *sombrero*, es *una ficha Einstein* (sección 2 de la hoja de fichas). Comprueba que no puede superponerse a su imagen especular. El matemático aficionado David Smith descubrió en noviembre de 2022 que es posible embaldosar el plano con copias de esta forma y de su imagen especular.



El azulejo de Einstein Su imagen en el espejo

En mayo de 2023 se anunció una segunda baldosa Einstein, llamada *vampiro*. El vampiro puede pavimentar todo el plano sin utilizar imágenes especulares. Fue creado por David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan y Chaim Goodman-Strauss.

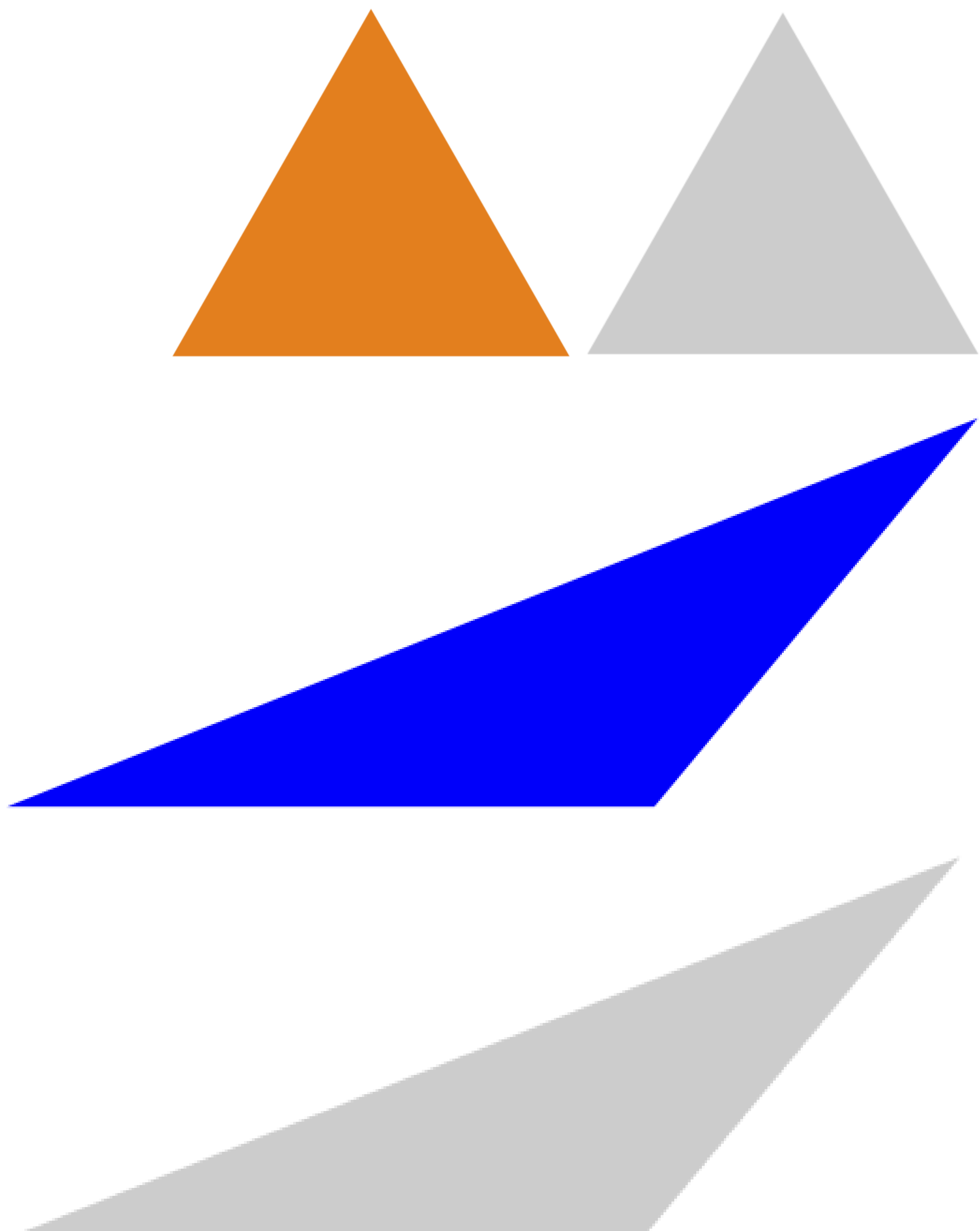
Solución: Examina el mosaico con el sombrero y observa que tenemos piezas con sombrero e imágenes especulares: elige una baldosa de referencia y examina qué otras piezas pueden superponerse a la baldosa de referencia y cuáles no. Observa también que el patrón no se repite en ninguna dirección.
Con la pieza vampiro, se pueden producir dos tipos de teselación: teselaciones que se repiten en dos direcciones si la baldosa y su imagen especular están permitidas, y teselaciones que no se repiten si las baldosas especulares están prohibidas. La ficha muestra un patrón que no se repite.

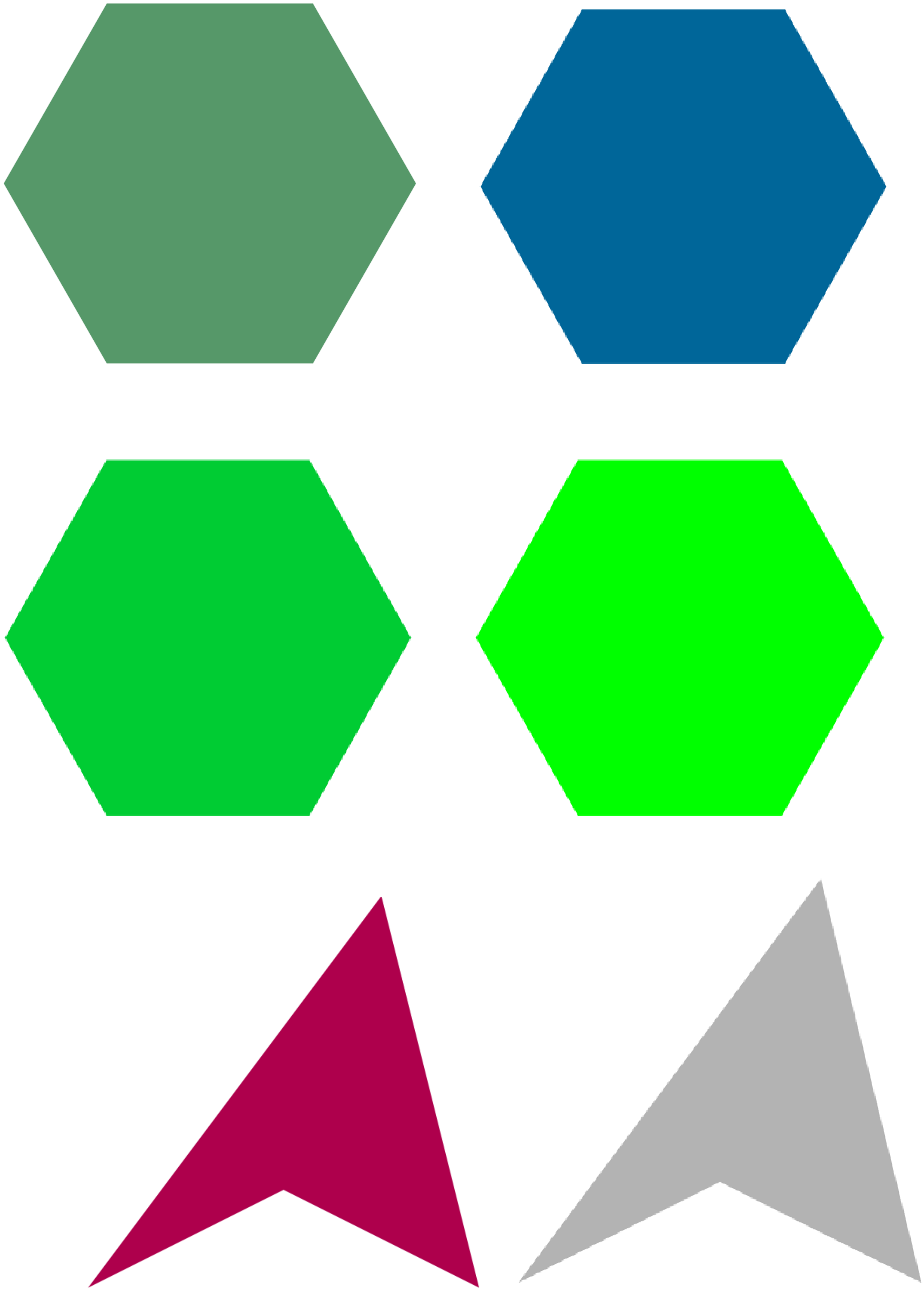
Crea y comparte
Puedes probar a teselar con otras formas o con varios tipos de formas. Comparte los mosaicos que hayas creado utilizando los hashtags **#idm314paper** y **#idm314**.

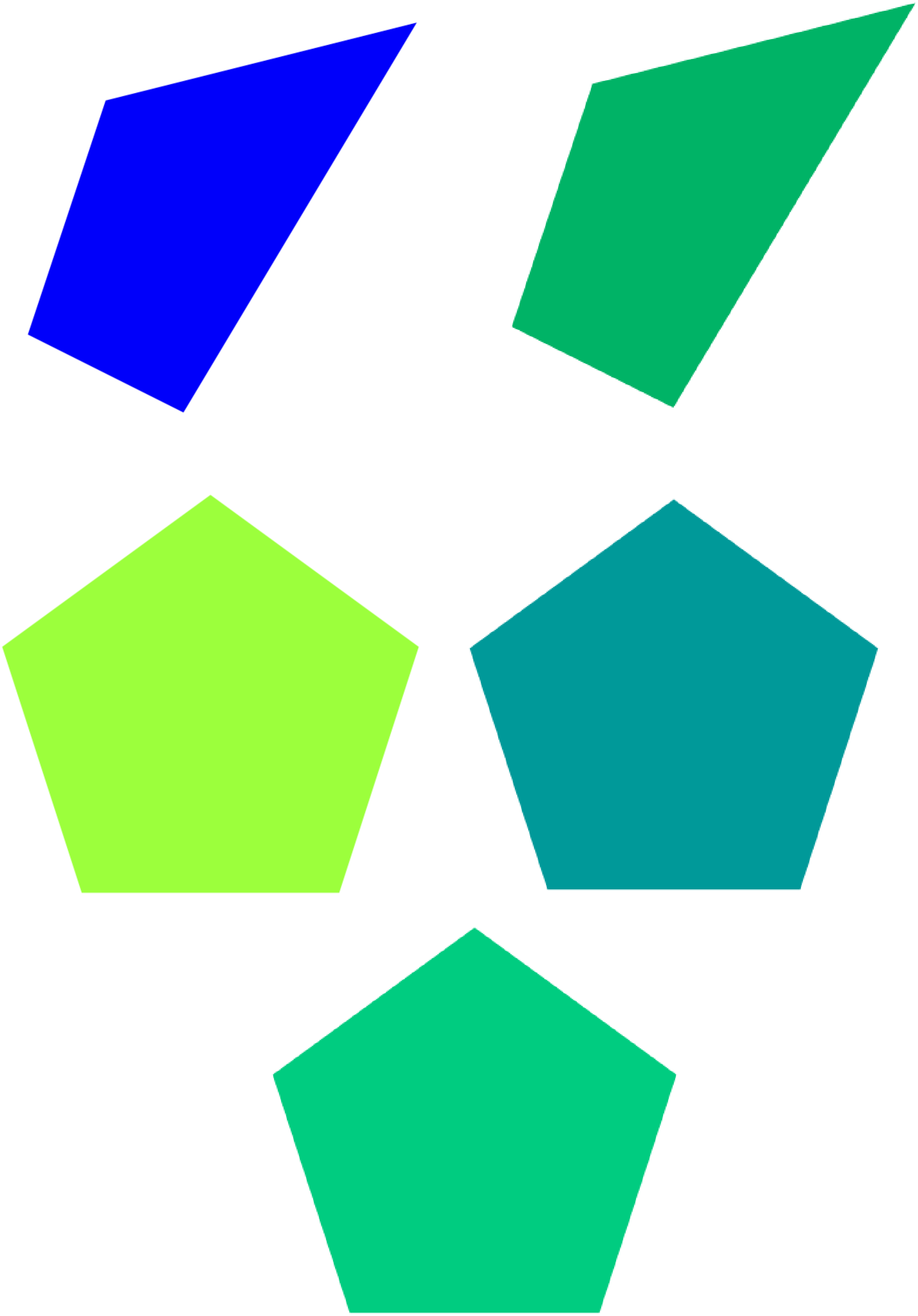
Referencia

Esta referencia contiene las baldosas de Einstein.

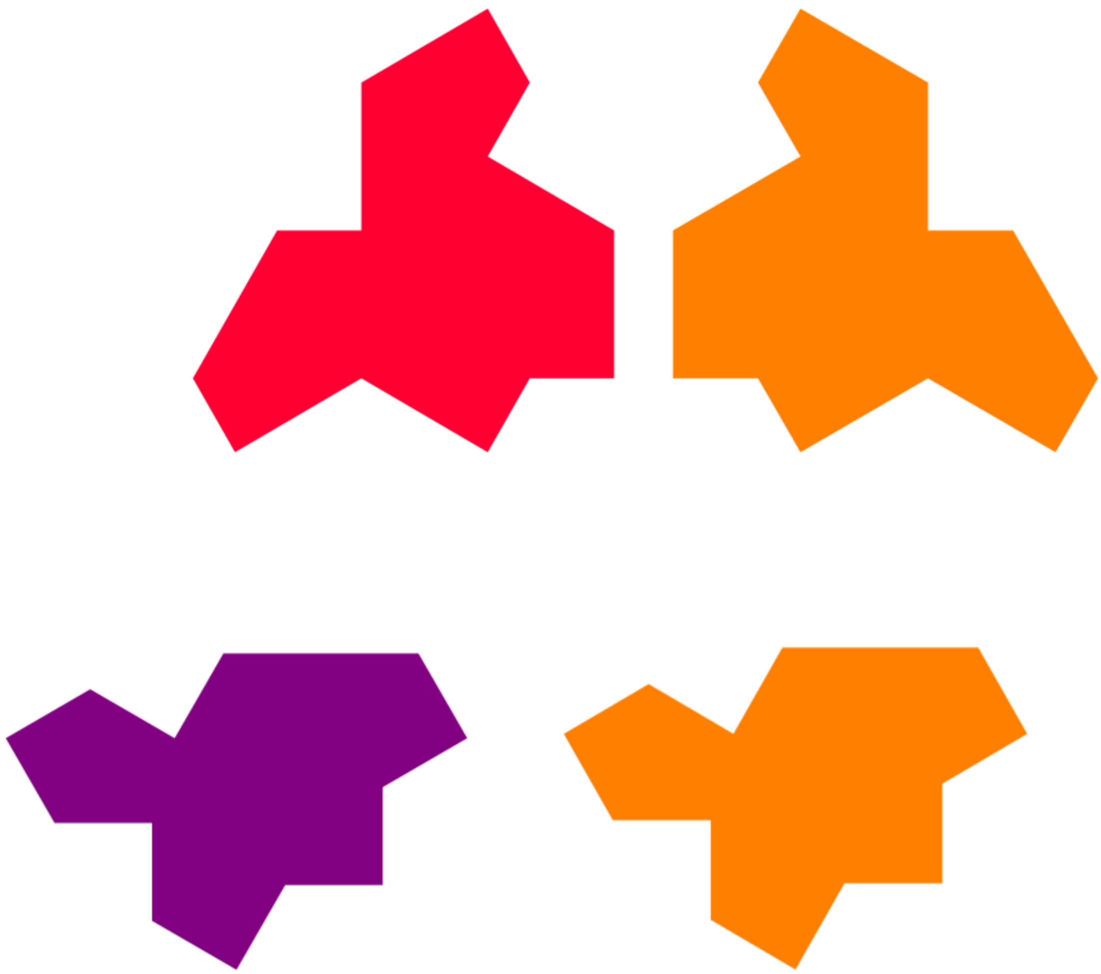
1



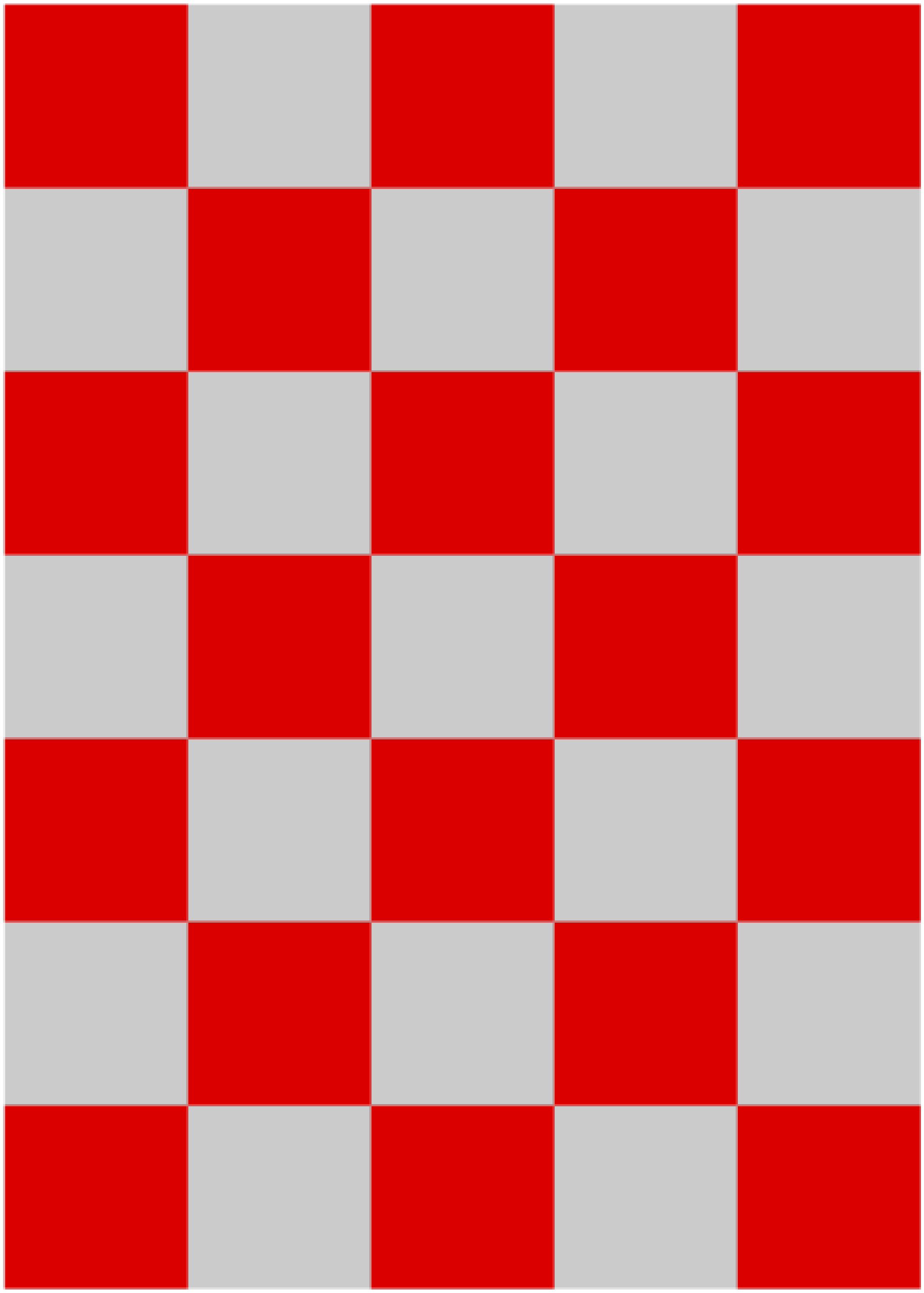


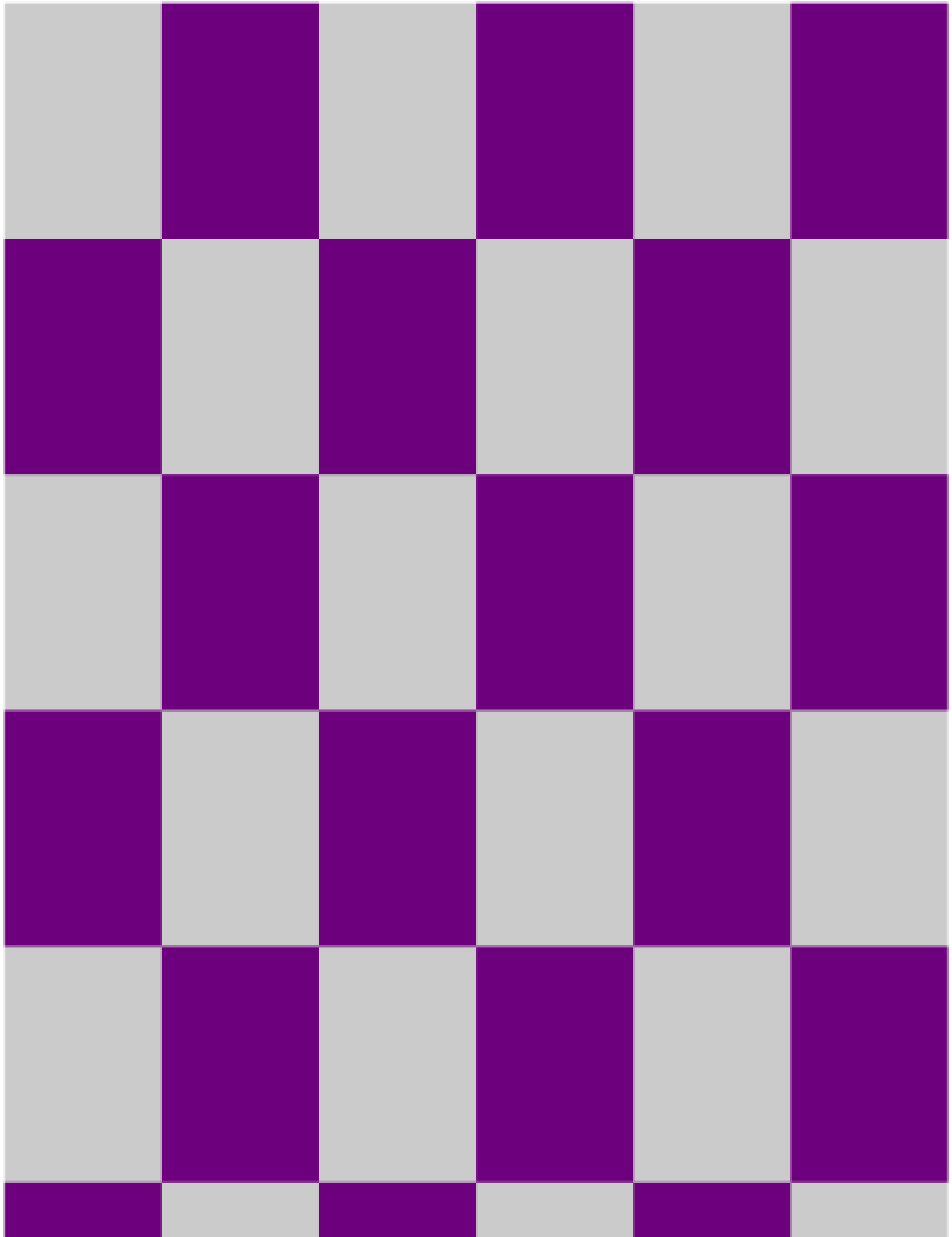


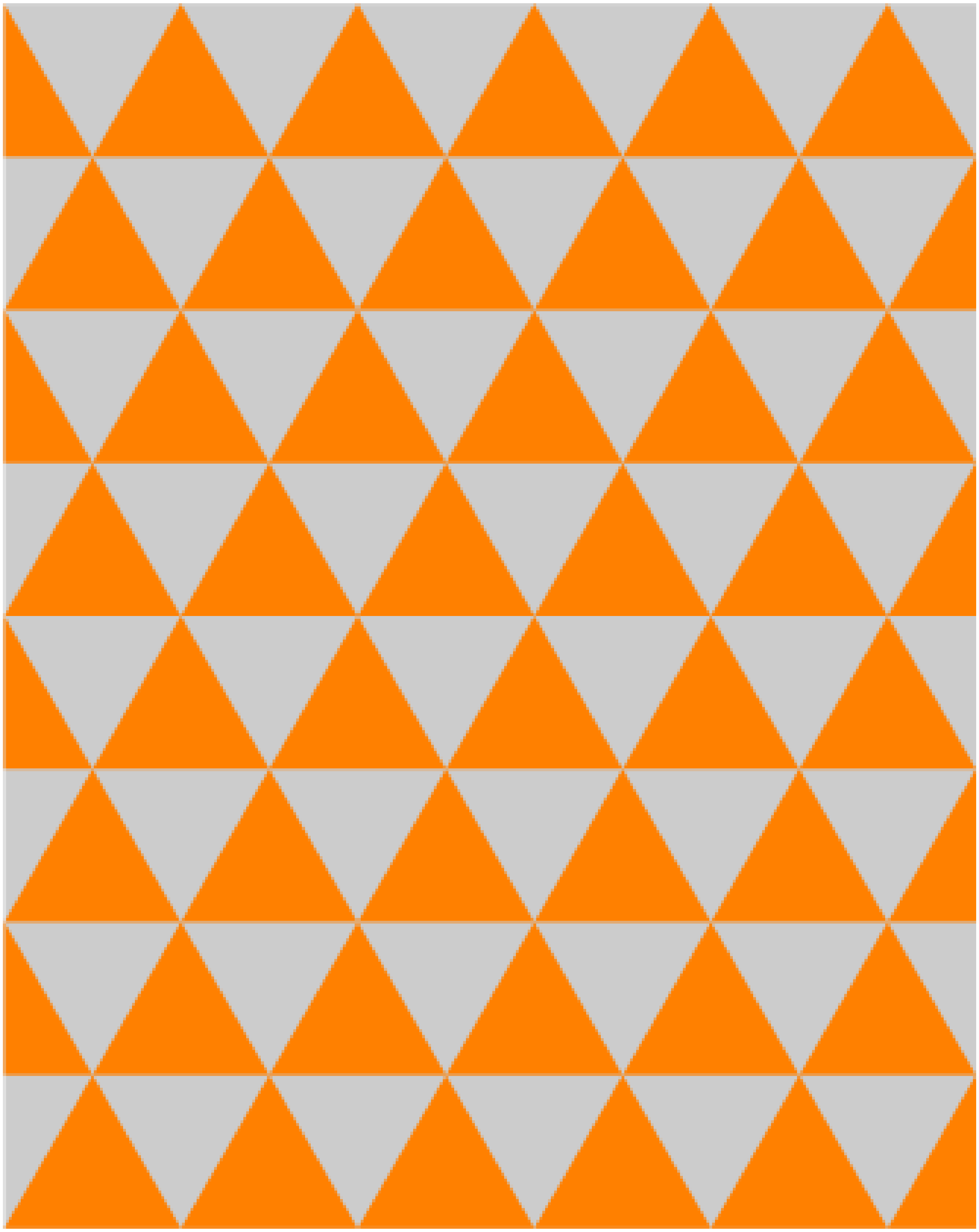
2

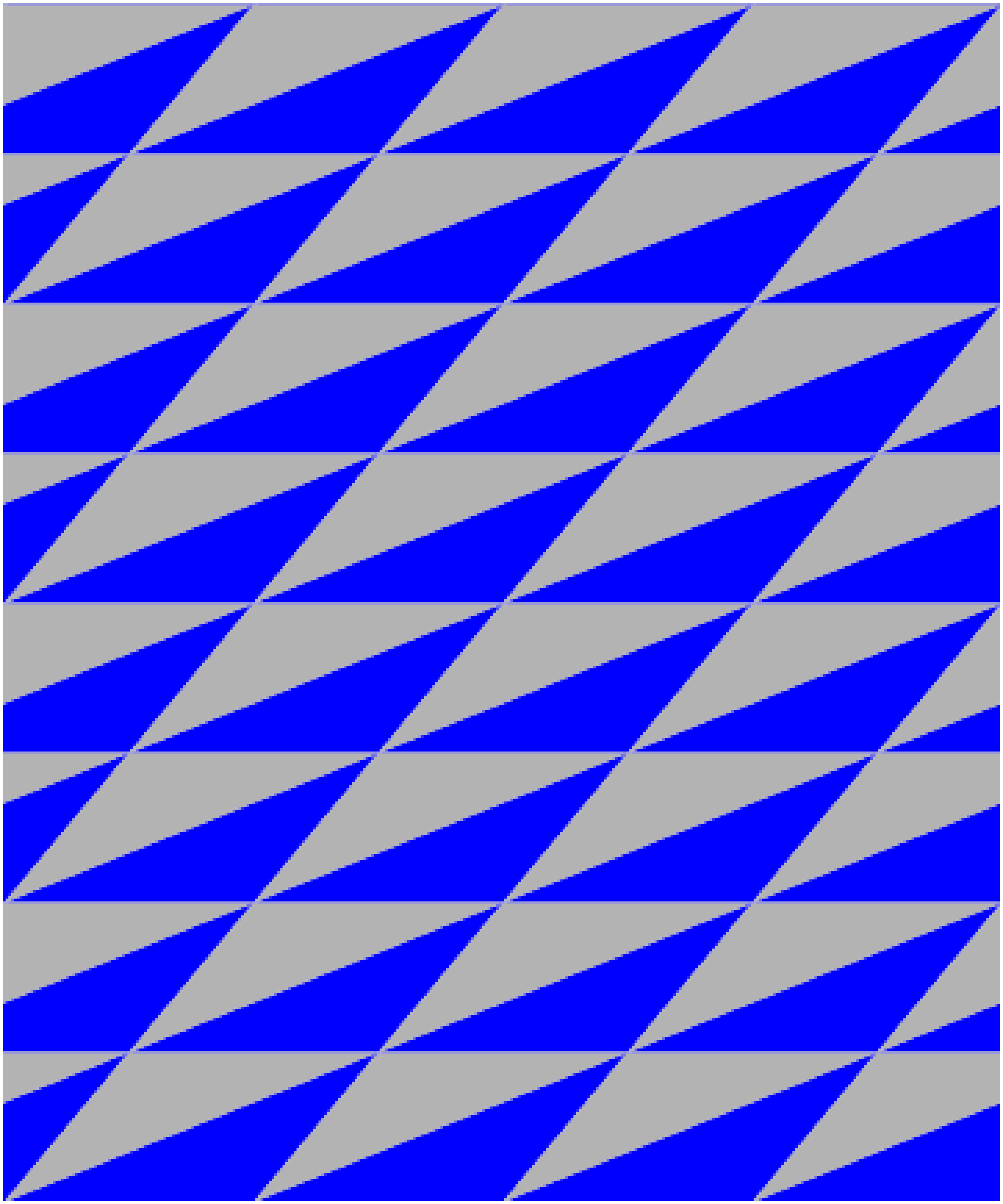


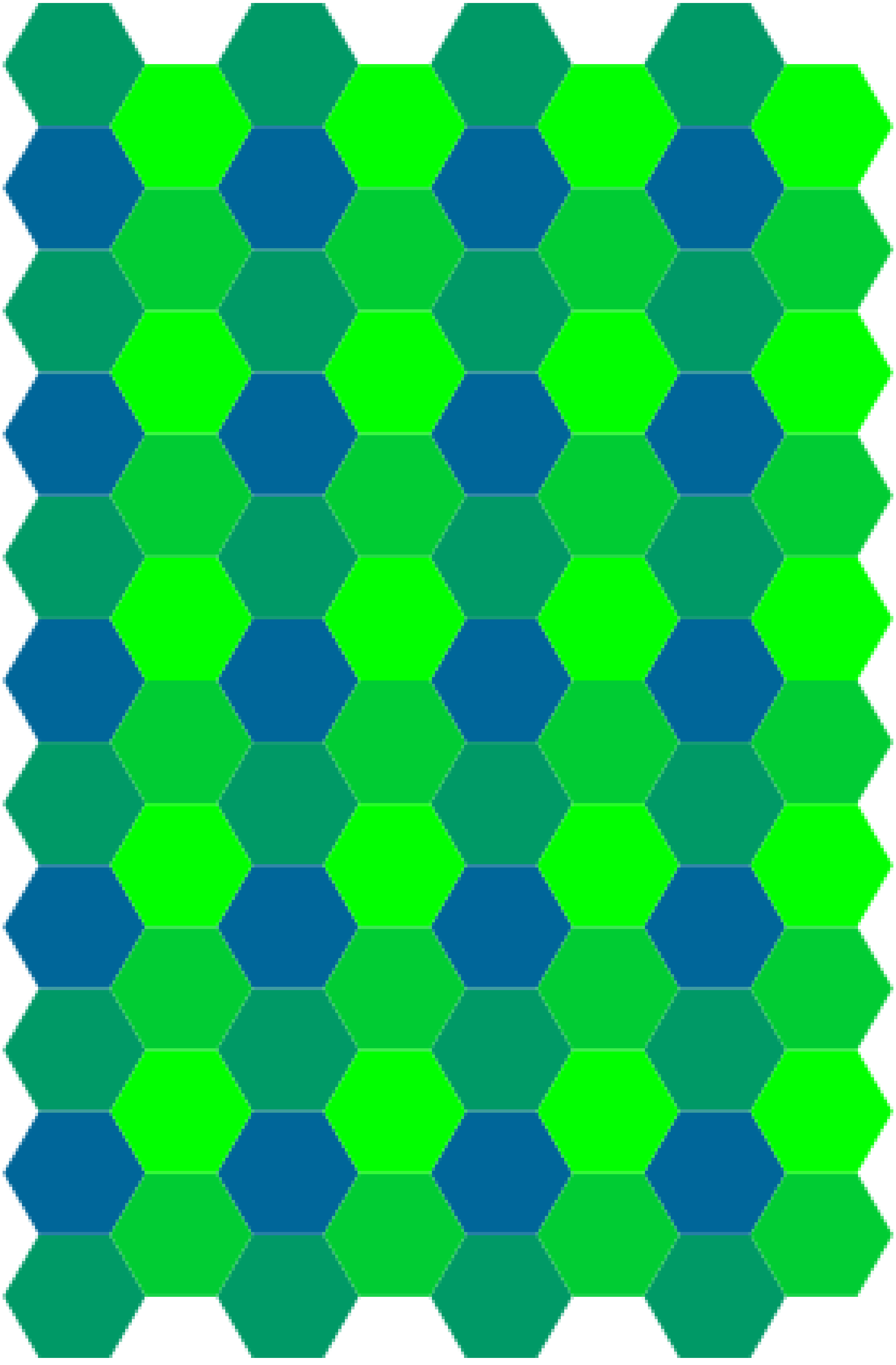
Solutions 1

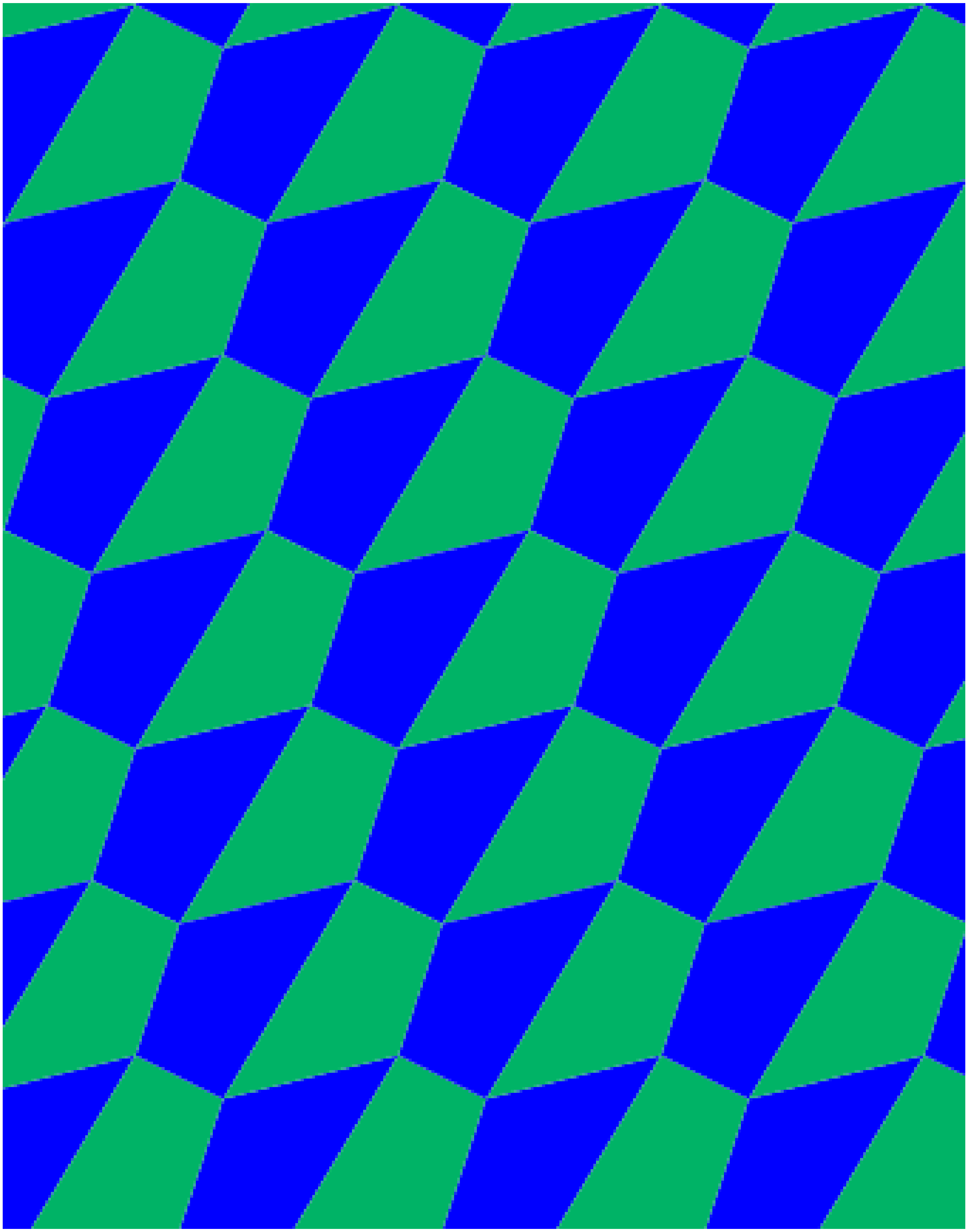


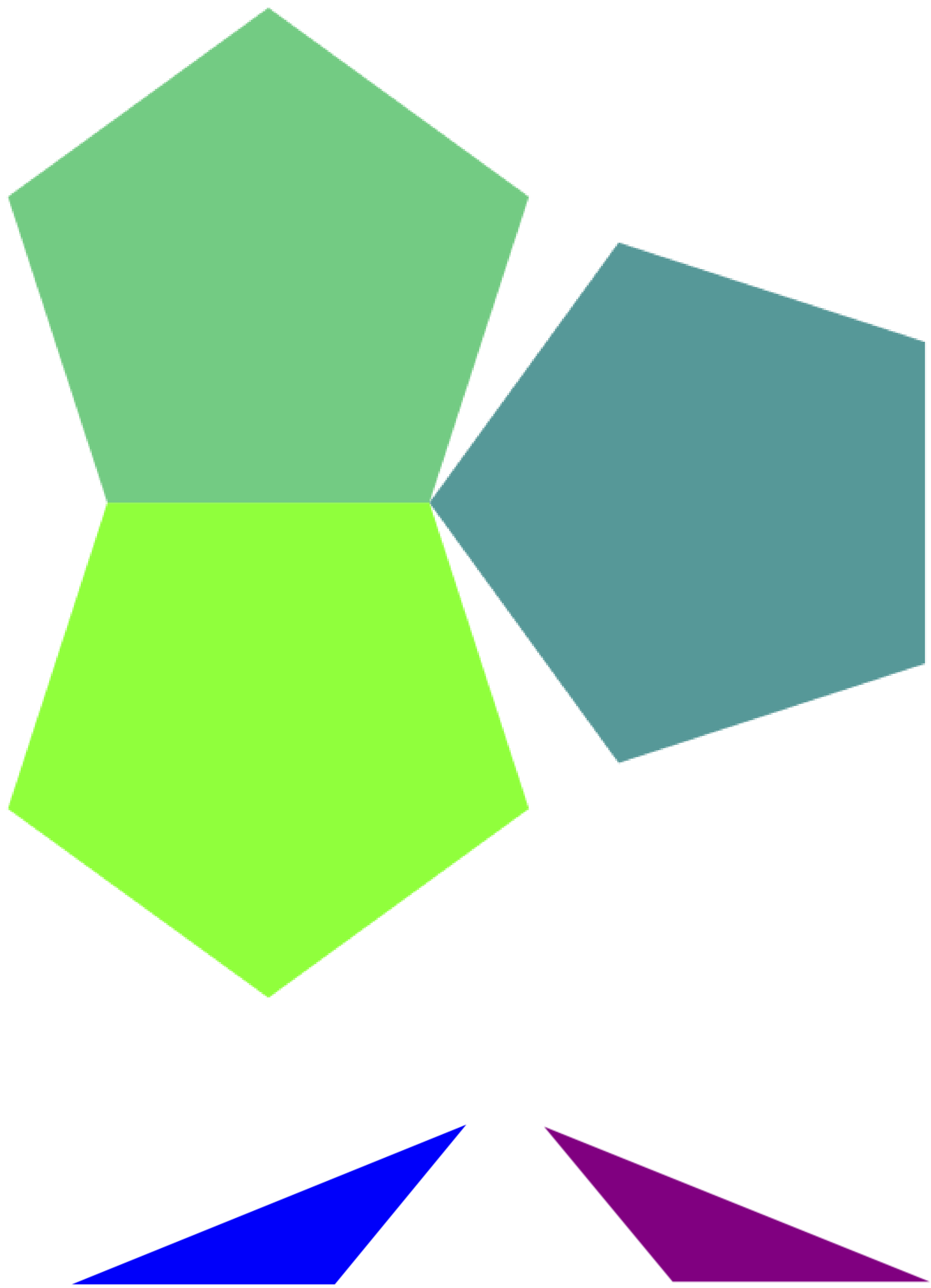


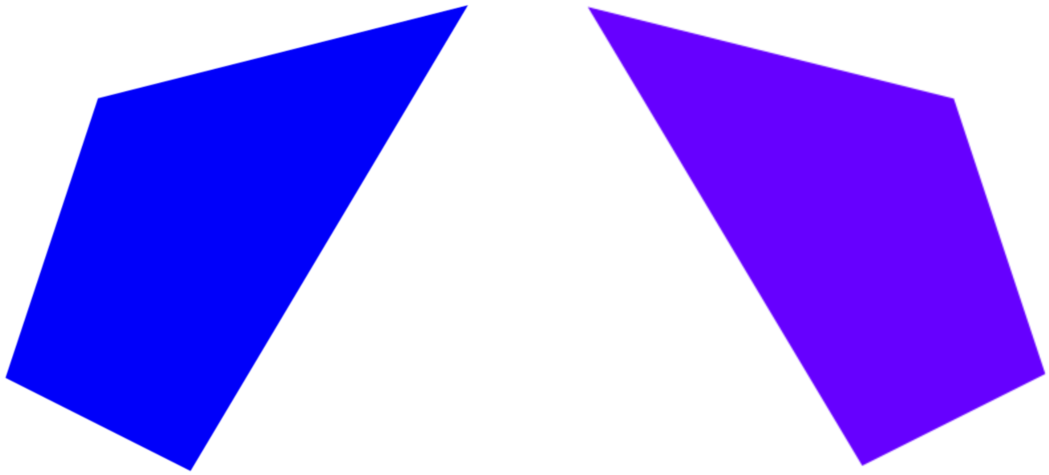




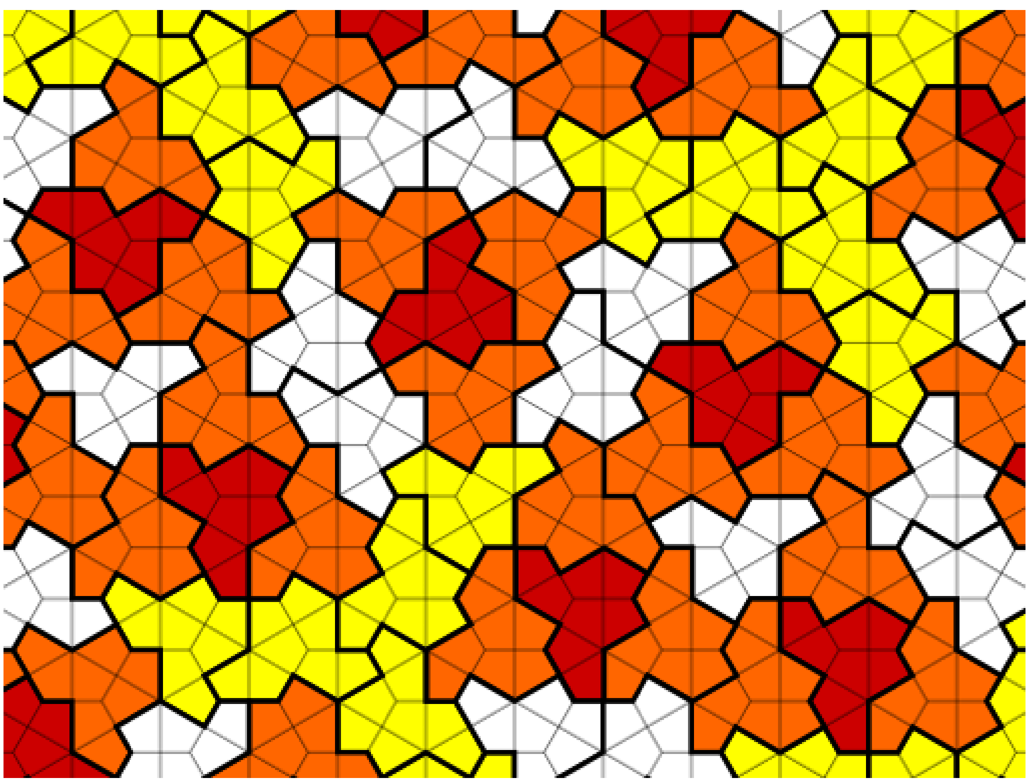




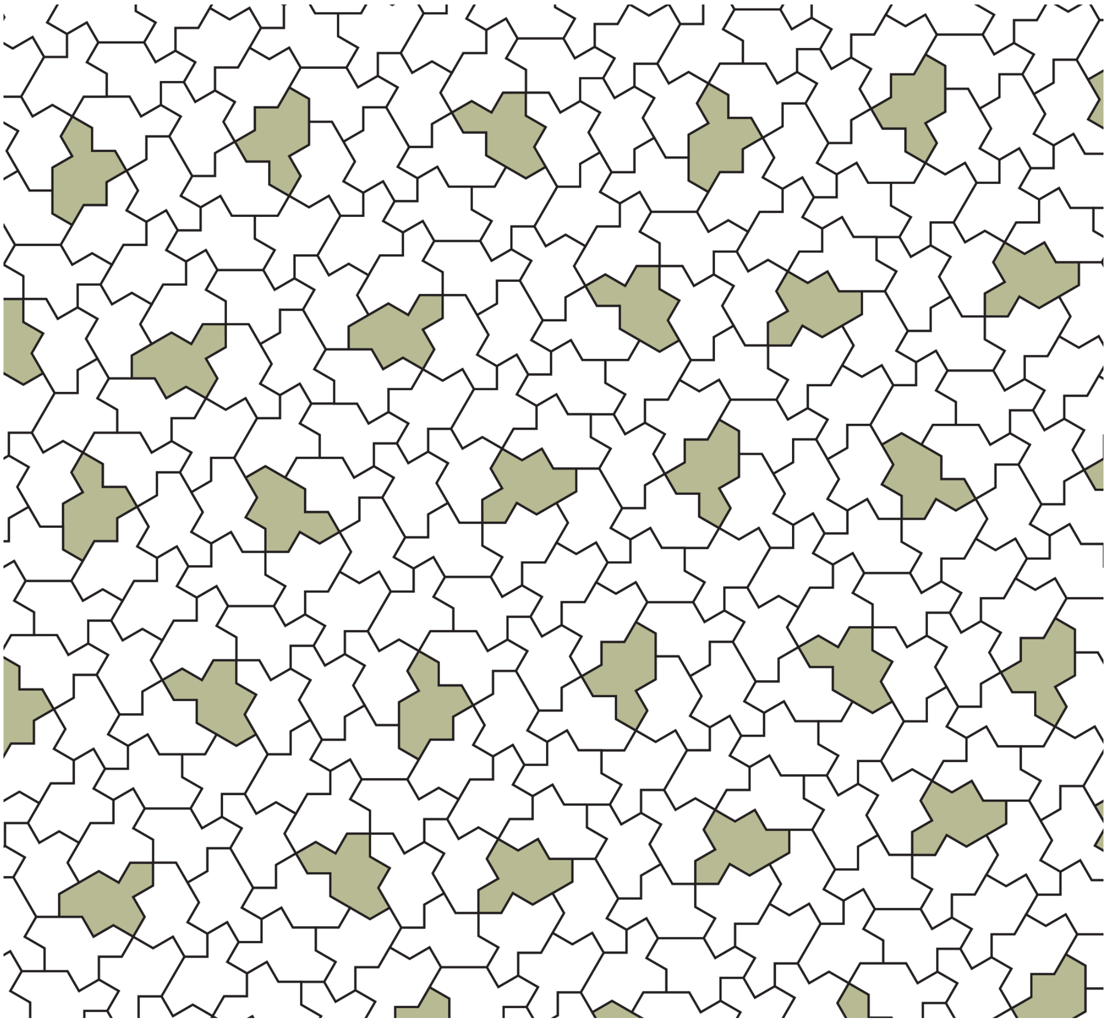




Solutions 2



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Smith_aperiodic_monotiling.svg



https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/

DÍA INTERNACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS
14 DE MARZO

Mosaicos artísticos

Esta actividad ofrece una guía paso a paso para hacer patrones artísticos de mosaicos. Veremos algunas explicaciones de cómo funcionan estos diseños, y después podrás crear tus propios patrones únicos.

Participantes:

A partir de 8 años, según la actividad.
No se necesitan conocimientos previos de matemáticas, aunque aparecen algunos conceptos maemáticos a medida que avanzan las actividades, como por ejemplo polígonos, triángulos, cuadriláteros y hexágonos, así como ideas como lados paralelos, traslación, rotación y otras simetrías

Preparativos:

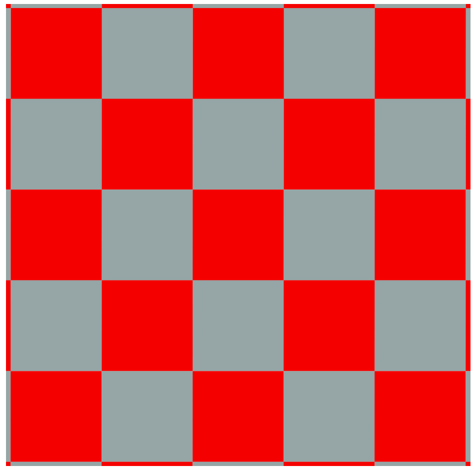
Papel, lápiz, goma de borrar, lápices de colores, tijeras y papel de colores.
Si se tiene acceso a tablets u ordenadores e Internet, se puede usar el programa https://tiled.art, (gratuito) u otros similares.

Actividad 1: Mosaicos que utilizan únicamente traslaciones.[1]

a. ***Mosaico cuadrilátero.*** **(A partir de 8 años)**

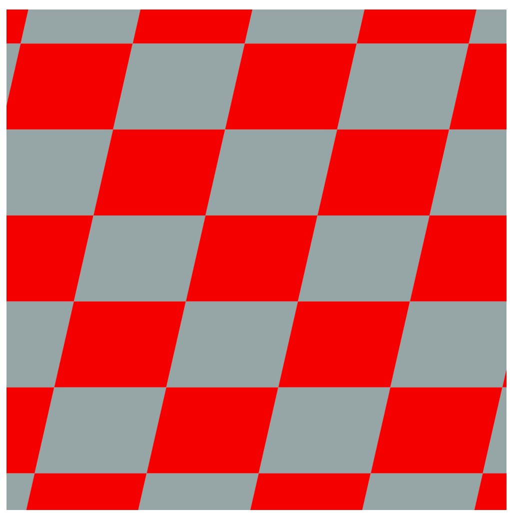
Comencemos por darnos cuenta de que un cuadrado (4 lados) puede cubrir todo el plano en un patrón repetitivo. Esto significa que podemos organizar mosaicos cuadrados para llenar completamente el plano sin espacios ni teselas superpuestas. Una tesela, también llamada azulejo o baldosa, es la unidad básica que se repite para formar el mosaico.

[1] Los mosaicos de esta actividad se han realizado con la herramienta https://tiled.art

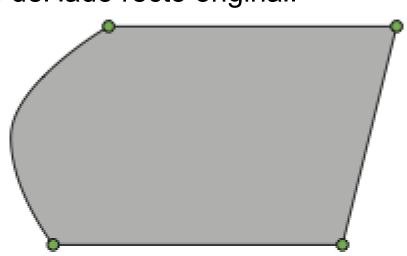


Ten en cuenta que las teselas tienen pares de lados paralelos e iguales. En estos mosaicos, las esquinas de las teselas están alineadas y conectadas entre sí. En todas las actividades siguientes, nos centraremos en los mosaicos en los que las esquinas de las teselas siempre están unidas.

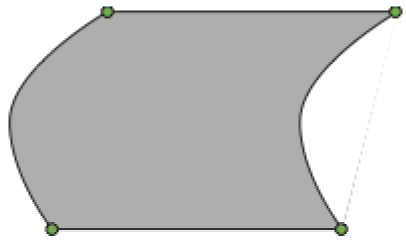
Los cuadrados se pueden transformar en formas irregulares con el mismo número de lados y aún así cubrir el plano en un patrón repetitivo, siempre que los lados paralelos permanezcan paralelos y de igual longitud. La forma resultante se llama *paralelogramo*.



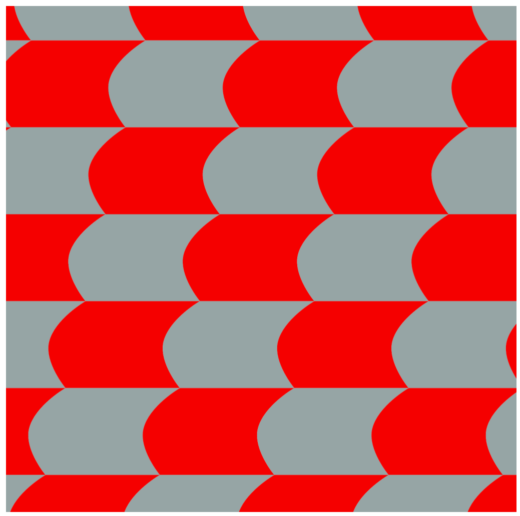
Ahora, comienza creando este mosaico, y fíjate en una tesela en particular. Toma un lado del mosaico, como el lado izquierdo, y cúrvalo, asegurándote de que los puntos finales de la curva sigan siendo los mismos que los del lado recto original.



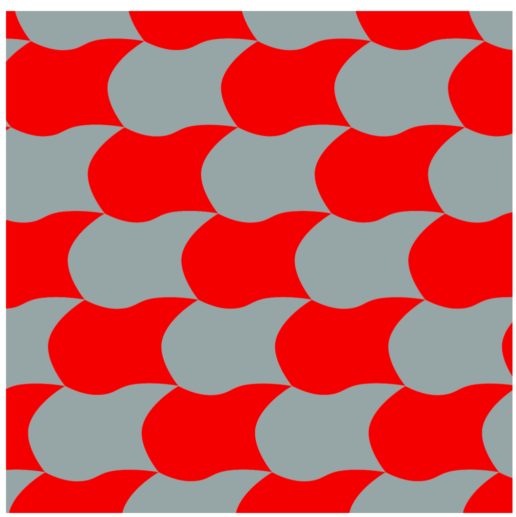
Ya no es posible colocar mosaicos en el plano con estas teselas porque el lado izquierdo de la tesela ya no coincide con el lado derecho de la tesela adyacente. Para arreglar esto, debemos aplicar la misma deformación en el lado derecho, asegurándonos de que los puntos finales también permanezcan iguales.



Ahora esto da un nuevo mosaico:

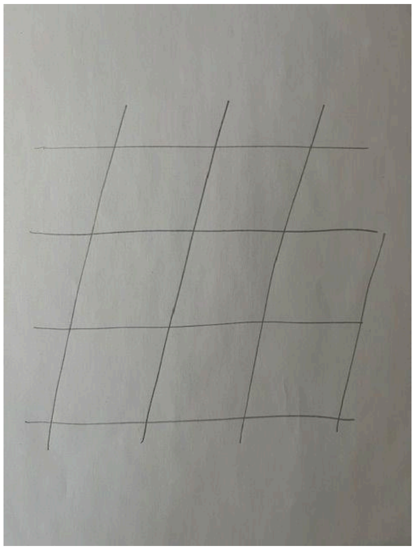


Puedes hacer lo mismo con los lados en la otra dirección, es decir, reemplazarlos con curvas que tengan los mismos puntos finales.

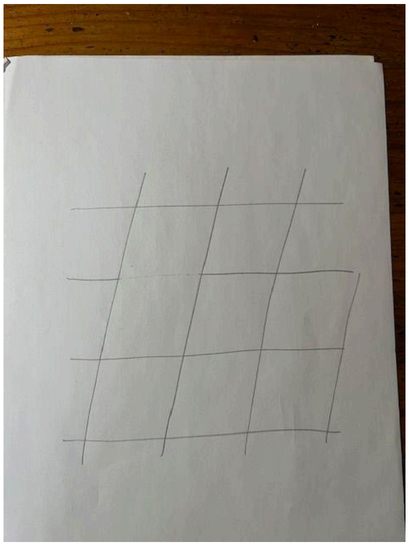


- Explica por qué funciona esta receta.
- Crea tus propios patrones. Comienza dibujando el mosaico inicial con un lápiz y usa un borrador para ajustar las líneas rectas a curvas.

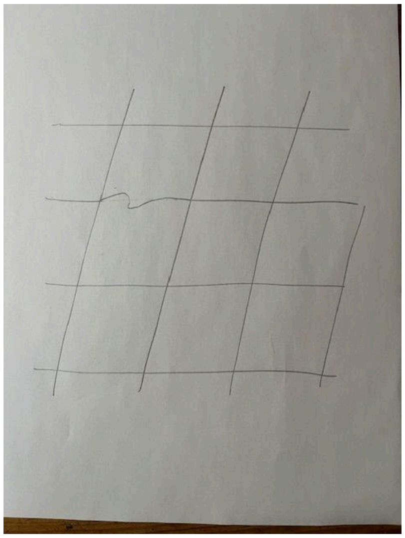
Comienza con una cuadrícula,



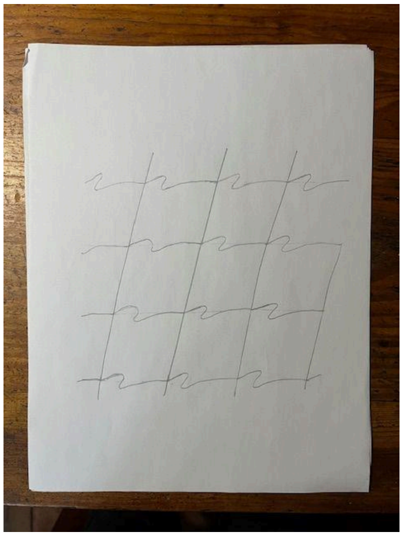
Luego borra un lado.



Reemplázalo por cualquier curva con los mismos puntos finales.

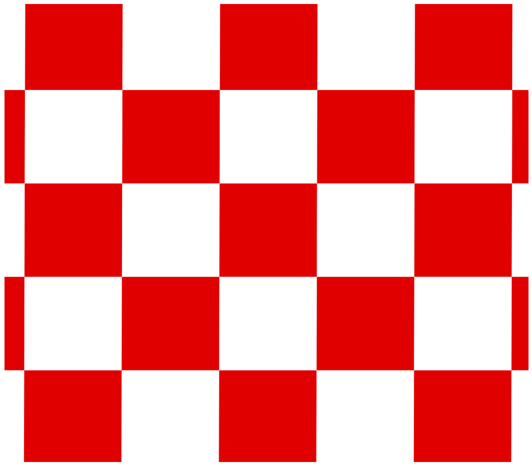


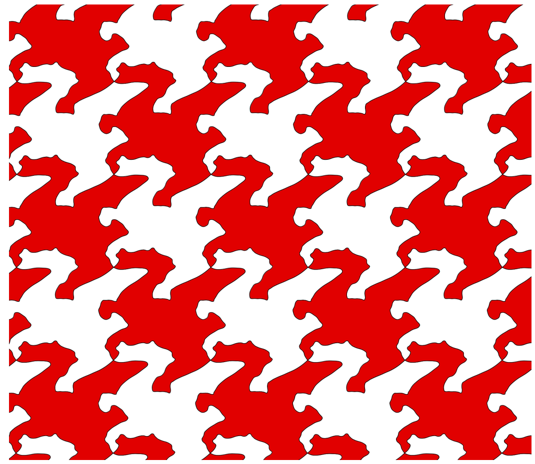
Luego reemplaza todos los segmentos paralelos con la misma curva.



Repítelo con la otra dirección.

Luego puedes colorear los mosaicos. También puedes recortar azulejos de hojas de papel de colores con unas tijeras y ensamblarlos. A continuación mostramosun ejemplo de mosaico con caballos voladores, inspirado en una obra del artista M.C. Escher, donde los mosaicos originales son cuadrados.

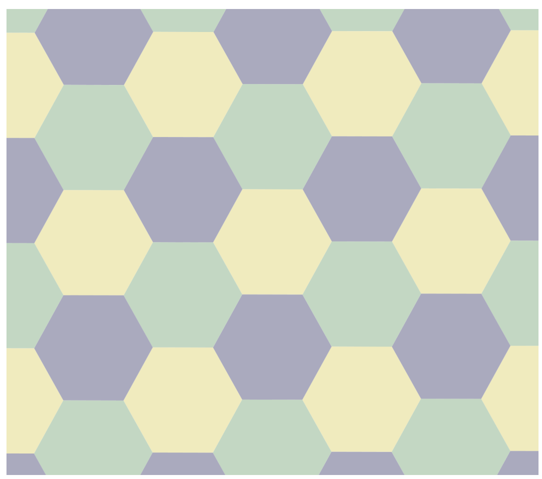




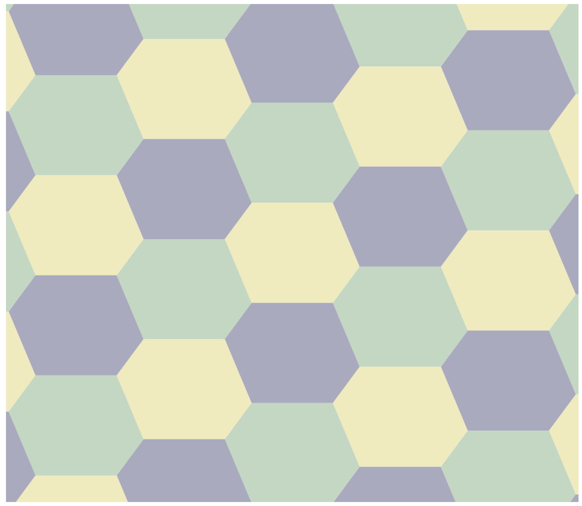
- ¿Puedes crear un patrón en el que los mosaicos tengan la forma de algo de la naturaleza (como una planta, un animal o parte de una planta) o un objeto reconocible?

b. ***Mosaico hexagonal.*** **(12 años en adelante)**

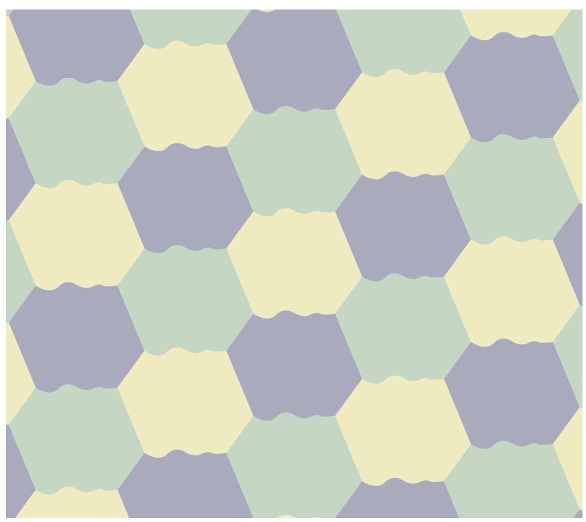
Comenzamos por ver que el *hexágono* (6 lados) regular puede cubrir todo el plano en un patrón repetitivo.



Cada tesela tiene tres pares de lados paralelos e iguales y, una vez más, las esquinas de los mosaicos están alineadas y conectadas. Estos hexágonos regulares se pueden transformar en hexágonos irregulares (aunque todavía polígonos con 6 lados) y aún así teselan el plano en un patrón repetitivo, siempre y cuando los lados paralelos permanezcan paralelos y de igual longitud.



Ahora, toma cualquier lado de una tesela y cúrvalo, manteniendo los puntos finales iguales que el lado recto original. Si quieres teselar el plano con este nuevo mosaico, debes seguir la misma regla que antes: aplicar la misma deformación en el lado paralelo al que acabas de curvar. Esto dará como resultado un nuevo patrón de mosaico.



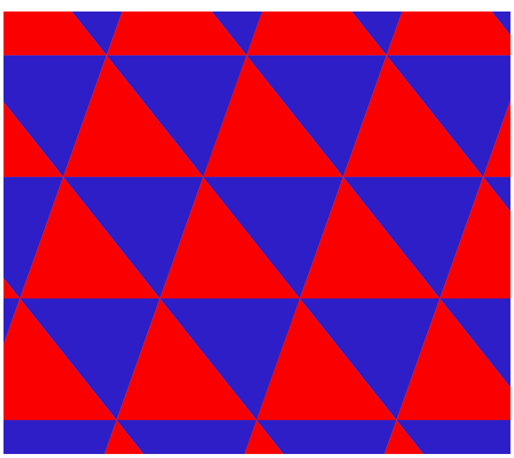
Ahora que hay tres pares de lados paralelos, puedes aplicar la misma deformación a los otros dos conjuntos de lados paralelos, curvándolos de la misma manera mientras mantienes los puntos finales fijos. Esto creará un patrón de mosaico nuevo y deformado.

- Explica por qué funciona esta receta.
- Crea tus propios patrones. Comienza dibujando el mosaico inicial con un lápiz y usa un borrador para ajustar las líneas rectas a curvas. Luego, puedes colorear los mosaicos. También puedes recortar azulejos de hojas de papel de colores con unas tijeras y ensamblarlos.
- ¿Puedes crear un patrón en el que las teselas tengan la forma de algo de la naturaleza (como una planta, un animal o parte de una planta) o un objeto reconocible?

Actividad 2: Mosaicos con rotaciones de 180 grados.[2]

c. ***Mosaicos triangulares o cuadriláteros.*** **(A partir de 12 años)**

Comencemos por darnos cuenta de que cualquier triángulo o cuadrilátero (un polígono con cuatro lados) puede formar mosaicos en el plano si se permiten rotaciones de 180 grados de los mosaicos, además de las traslaciones.



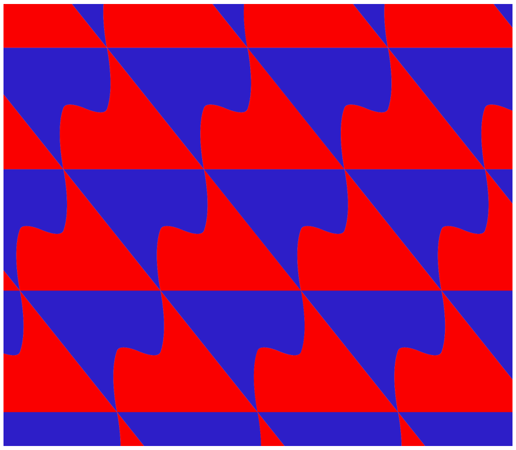
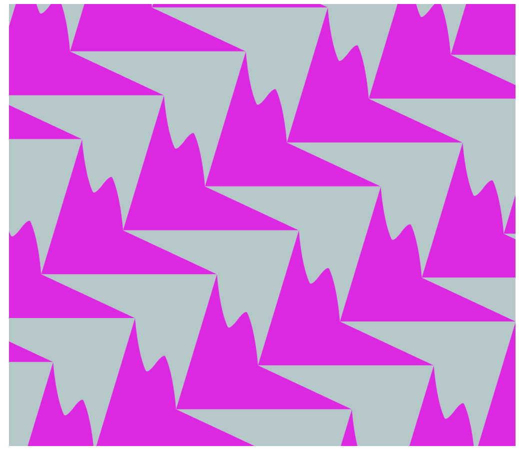
Mosaico con triángulos

Mosaico con cuadriláteros

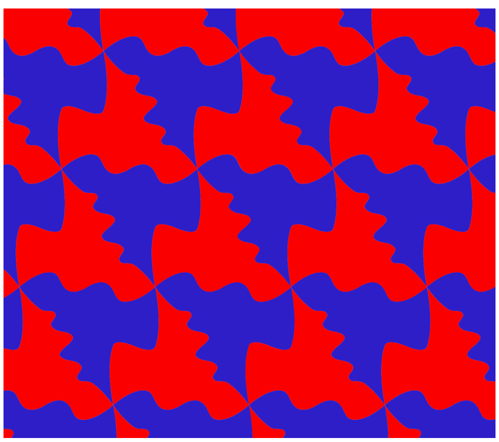
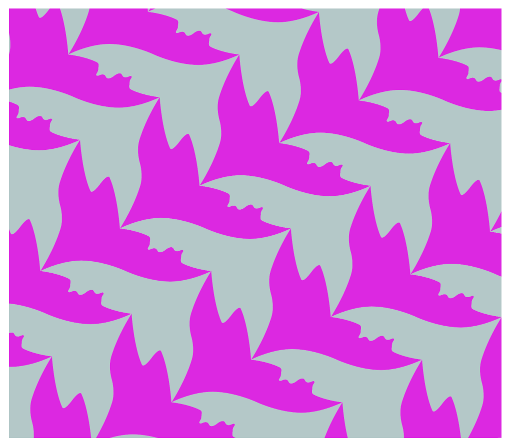
Ahora, toma cualquiera de estos mosaicos, elige una tesela y elige uno de sus lados. Deforma este lado recto en una curva, asegurándote de que los puntos finales permanezcan iguales.

[2] Los mosaicos de esta actividad se han realizado con la herramienta https://tiled.art.

- Ten cuidado: no puedes cambiar el lado al azar si quieres que las fichas sigan encajando para cubrir el plano. El lado curvo debe coincidir con el lado curvo girado de la tesela que se encuentra al lado. Esto significa que el lado debe verse igual si lo giramos 180 grados alrededor del punto medio del lado. En otras palabras, no puedes mover el punto medio del lado. Si sigue esta regla para obtener un nuevo patrón de mosaico.

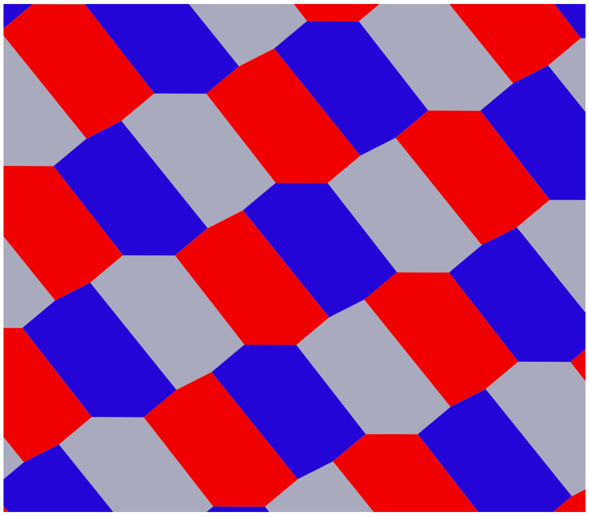
Puedes hacer lo mismo con los otros lados en diferentes direcciones. Simplemente aplica la misma regla: curva los lados asegurándote de que coincidan con los lados girados de las teselas adyacentes.

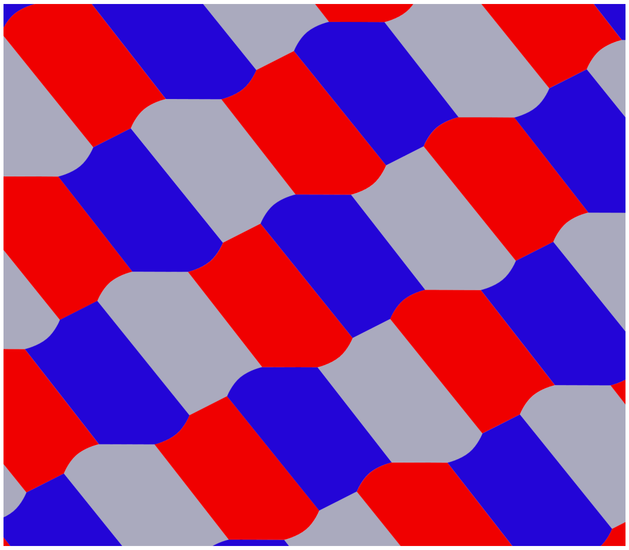
- ¿Puedes explicar por qué funciona esta receta y por qué las curvas que reemplazan a los lados deben ser simétricas alrededor de su centro?
- Crea tus propios patrones.
- ¿Puedes crear un patrón en el que las teselas tengan la forma de algo de la naturaleza (como una planta, un animal o parte de una planta) o de un objeto reconocible?

d. ***Mosaico hexagonal.*** **(14 años en adelante)**
Otra forma de crear este tipo de mosaicos es comenzando con hexágonos (polígonos con seis lados) que tienen un par de lados opuestos paralelos con la misma longitud.[3]

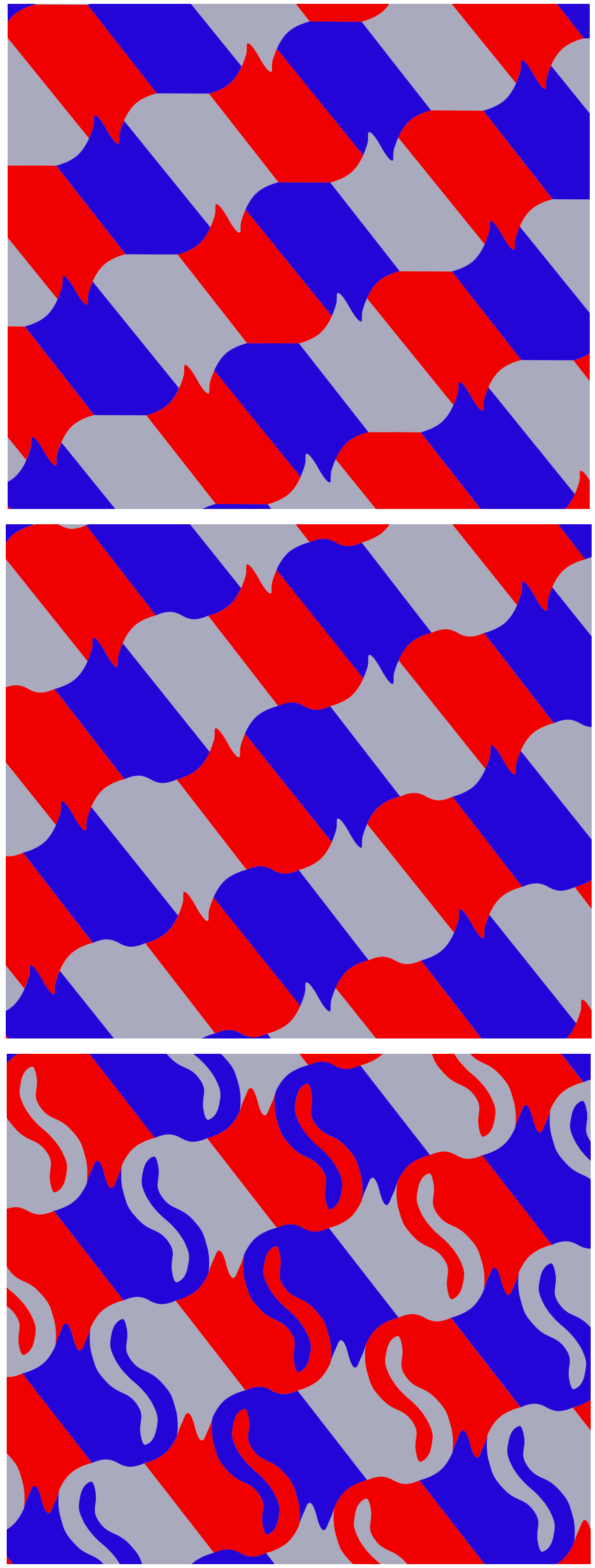
[3] Este método fue ideado por el matemático John H. Conway.

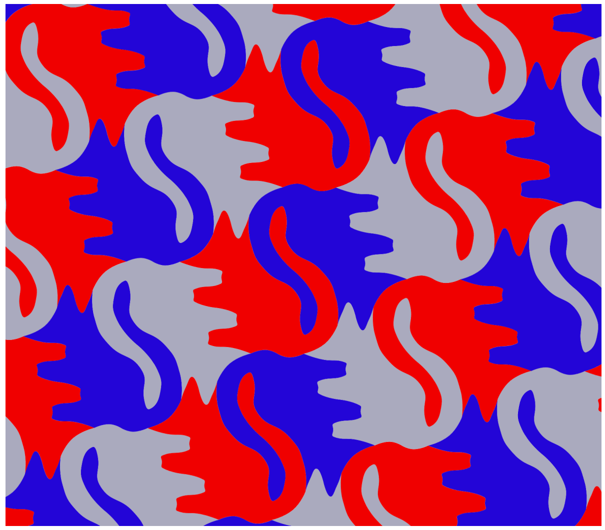


Los lados paralelos e iguales se pueden reemplazar con dos curvas paralelas e iguales, siempre que los puntos finales sigan siendo los mismos.



Cada uno de los otros cuatro lados se puede reemplazar con cualquier curva que sea simétrica alrededor del centro del lado manteniendo los mismos puntos finales. Estos son los pasos a seguir:

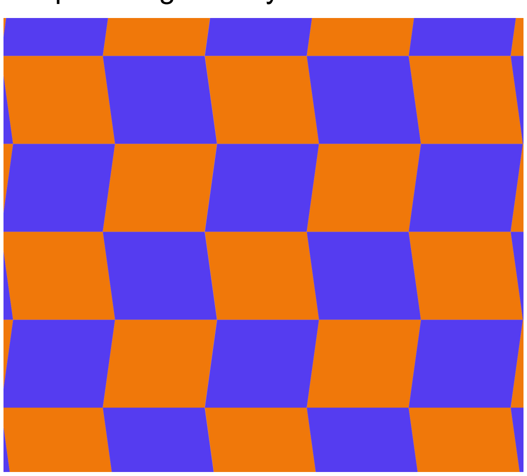




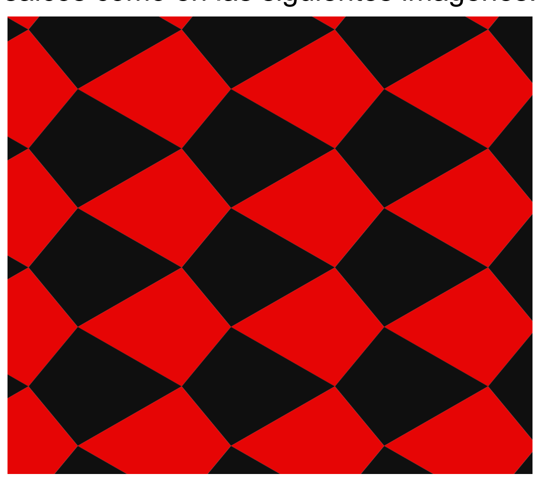
- Explica por qué funciona este método.
- En el mosaico hexagonal original, tres hexágonos se encuentran en cada esquina. Por este motivo, el mosaico se puede colorear con tres colores diferentes.
- Crea tus propios mosaicos.

Actividad 3: Mosaicos con volteos (reflexiones).[4] (A partir de 14 años)

En este caso busaremos teselas que puedan cubrir todo el plano, con la mitad de estas teselas volteadas (pudes pensar que las teselas son transparentes y las volteas, o puedes pensar que tienes teselas originales y teselas que lucen como la reflexión en un espejo de la tesela original). Además de estas reflexiones, también tendremos traslaciones como antes. Hay dos tipos de cuadriláteros (figuras de 4 lados) en las que esto funciona: *paralelogramos*, donde los lados opuestos son paralelos, y *cometas*, que tienen dos pares de lados adyacentes iguales. En el caso de los paralelogramos, cada par de lados paralelos se denomina "par gemelo". En el caso de las cometas, cada par de lados iguales también se denomina "par gemelo".
Los paralelogramos y las cometas forman mosaicos como en las siguientes imágenes:



Mosaico con paralelogramos



Mosaico con cometas

[4] Los mosaicos de esta actividad se han realizado con la herramienta https://tiled.art.

Observa que en ambos casos hay ejes de simetría paralelos (horizontales en las imágenes), a esta dirección la llamaremos *dirección de volteo*. La dirección perpendicular (vertical en las imágenes) se llamará *dirección de sesgo*.

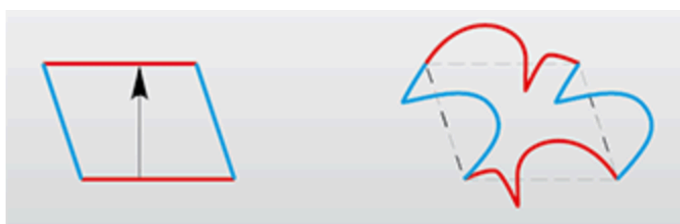
En cualquier caso, cuando deformas un lado en una curva, también debes deformar su par gemelo correspondientemente. Para ello existen dos transformaciones posibles:

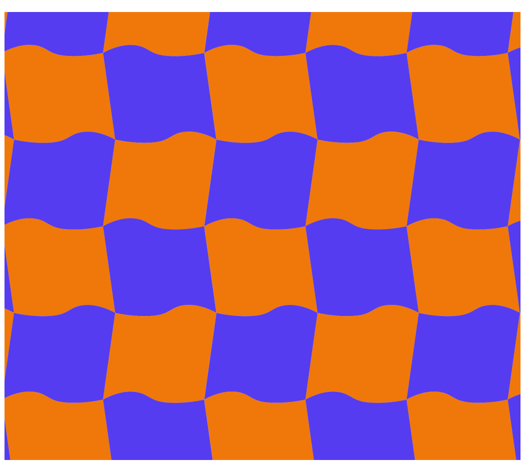
- Translación en una dirección
- Reflexión sesgada a lo largo de una dirección. Una reflexión sesgada es una reflexión seguida de una traslación (ambas en la misma dirección)

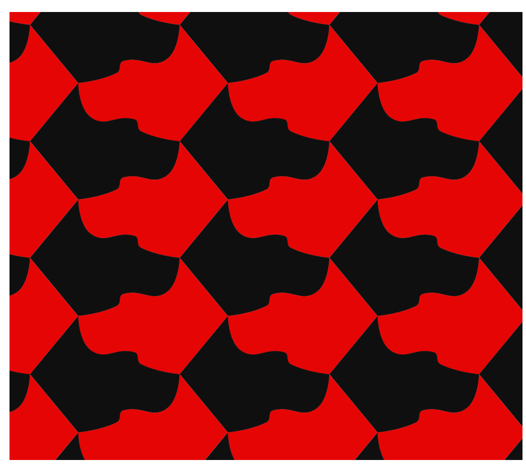
Si eliges un paralelogramo y deformas un lado paralelo a la dirección de volteo, debes modificar su gemelo mediante una reflexión sesgada en la dirección de sesgo.

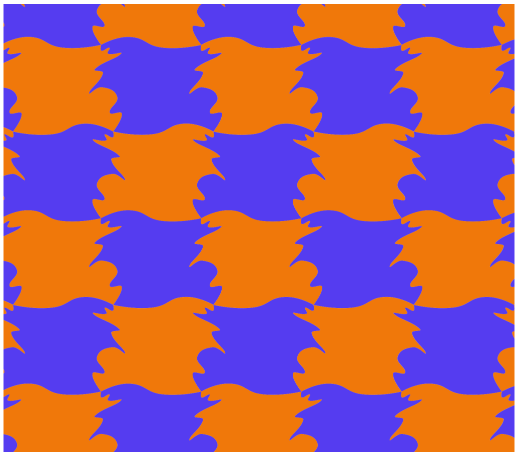
Si eliges un paralelogramo y deformas un lado que no es paralelo a la dirección de volteo, debes modificar su gemelo mediante una traslación en la dirección de volteo.

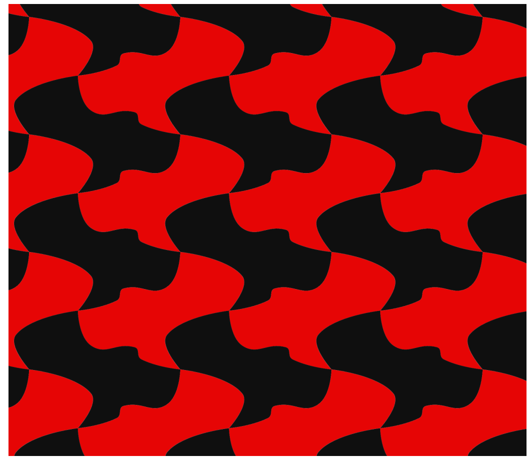
Si eliges una cometa, cualquier lado que deformes, debes modificar el lado gemelo correspondiente mediante una reflexión sesgada en la dirección de sesgo.











- Analiza por qué funcionan estas reglas.
- Crea tus propios mosaicos..

Actividad 4: Mosaicos con otros tipos de simetrías. (A partir de 14 años)

Hay muchas formas diferentes de crear mosaicos utilizando formas que se repiten en un patrón, con diferentes tipos de simetrías. Puedes intentar hacer el tuyo propio experimentando con formas y simetrías, o puedes consultar algunos ejemplos en este sitio web: https://tiled.art**.**

Recursos:
https://tiled.art
https://es.tessellations-nicolas.com/method.php

¡Crea y comparte!
Comparta los hallazgos de los participantes usando los hashtags. **#idm314tilings** y **#idm314**.

La aguja de Buffon

Participantes:

A partir de 12 años. Son recomendables conocimientos de probabilidad e integración, aunque no estrictamente necesarios.

Preparación:

Se necesitan una serie de palitos y un tablero. Los palitos pueden ser agujas, palillos de dientes, cerillas, palos de helado, palos de brocheta… cualquier tipo de bastoncillos pequeños que tengan todos la misma longitud. El tablero puede ser una hoja grande de papel (papel de regalo por ejemplo), o se puede dibujar en el suelo con tiza.

Actividad:

La actividad consiste en encontrar una aproximación del número pi usando la probabilidad.

1. Dibuja un conjunto de líneas paralelas en el tablero. La distancia entre ellas debe ser exactamente el doble de la longitud de un palito.
2. Lanza los palitos al aire para que caigan sobre el tablero.
3. Cuenta el número de palitos que cruzan alguna de las líneas paralelas.
4. Divide la cantidad de palitos lanzados por la cantidad de palitos que cruzan las líneas. El resultado debería ser aproximadamente pi.

El coordinador de la actividad explica el proceso, y los participantes realizarán el experimento por sí mismos en pequeños grupos.

Alternativas:

- ¿Qué pasa cuando la separación entre las líneas paralelas es otra distancia?
- Piensa y prueba otras formas de palitos y tableros. Por ejemplo, palitos sobre un tablero de ajedrez, o lanzar triángulos equiláteros sobre una rejilla triangular.

¡Crea y comparte!
Graba un vídeo del evento, graba tu propia explicación, crea nuevos problemas de probabilidad geométrica. Comparte tus creaciones usando los hashtags **#idm314needle** y **#idm314**.

Explicación matemática y recursos:

Esta actividad se basa en el "problema de la aguja de Buffon", llamado así por el matemático francés Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, quien lo publicó por primera vez en el siglo XVIII. La probabilidad de que una aguja cruce una línea es 1 / pi. Podemos estimar la probabilidad de un evento repitiendo un experimento muchas veces y dividiendo el número de casos de éxito por el número total de casos. En este caso, el "éxito" es cruzar una línea, y eso nos da la aproximación de pi. ¿Por qué aparece el número pi en la probabilidad? Una aguja que cae perfectamente paralela a las líneas en el tablero tendría una probabilidad casi 0 de cruzar una línea, mientras que una que cae perfectamente perpendicular tendría una probabilidad de 0,5 de cruzar una línea (el máximo). La probabilidad está relacionada con el ángulo de rotación de la aguja, y todos los ángulos posibles describen un círculo completo. Para obtener una explicación más detallada, basta con buscar el "problema de la aguja de Buffon".

Se puede dar una explicación usando la integración, y solo una idea intuitiva de probabilidad (ver ref. 2, método 1). Si los estudiantes tienen un entrenamiento más formal en probabilidad, puede explicarse usando funciones de densidad (ver ref. 1) o expectativa matemática (ref. 2, método 2).

Referencias:

1. https://www.youtube.com/watch?v=sJVivjuMfWA
2. https://www.youtube.com/watch?v=szUH1rzwbAw
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s_needle_problem

DÍA INTERNACIONAL DE LAS MATEMÁTICAS
14 DE MARZO

Actividades en papel

En este documento, encontrarás varias actividades que utilizan papel:

1. Mapas para colorear
2. Pez-Octaedro
3. Mosaicos
4. Puentes de Königsberg
5. Doblar y cortar

Participantes:

De 10 a 12 años o más (según la actividad).
No se requieren conocimientos matemáticos previos.

Preparativos:

Plantillas impresas (una para cada participante), lápices de colores.
Algunas actividades requieren tijeras y pegamento o cinta adhesiva.

Actividad 1. Mapas para colorear

Las reglas para colorear diferentes regiones son:

- Dos secciones que comparten un borde común no se pueden colorear con el mismo color.
- Se debe usar la menor cantidad de colores posible.

Los participantes tienen que colorear cada figura siguiendo las reglas.

Opciones:

- Tener mapas locales impresos a mano.
- Jugar con esta aplicación interactiva con mapas para colorear: https://mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring

Actividad 2. Pez-Octaedro:

La plantilla proporciona el desarrollo plano (en dos partes) de un octaedro decorado con peces teselados. Imprime dos copias, corta a lo largo de las líneas continuas y dobla por las líneas punteadas. Colorea si lo deseas y pega o une con cinta adhesiva las dos mitades.

Como profesor, o profesora, puedes introducir el concepto de poliedro (vértices, aristas, caras) y encontrar ejemplos alrededor.
Algunas preguntas para los alumnos:

- ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene la escultura de papel, y cuántos peces?
- ¿Cuántas bocas se encuentran en cada vértice? ¿Cuántas colas se encuentran y dónde? ¿Dónde se encuentran las aletas? (Dos bocas se encuentran en cada vértice, tres colas en el centro de cuatro caras y tres aletas en el centro de las otras cuatro caras).
- ¿Qué otras esculturas cerradas puedes construir a partir de triángulos (equiláteros)?
- Cuenta el número de caras (C), aristas (A) y vértices (V) de varios poliedros convexos diferentes. (Ordénalos en una tabla visible para todos e intenta que los alumnos encuentren la fórmula de Euler: $V - A + C = 2$. Puedes dar pistas cuando sea necesario (por ejemplo, solo se usa la suma y la resta)).

Actividad 3. Mosaicos

Los participantes colorean las dos imágenes en la plantilla.

El profesor o profesora puede hablar sobre simetrías, espejos, o preguntar cómo continuaría el patrón después de los bordes. Los y las estudiantes pueden buscar simetrías en las cosas que les rodean, dibujar su propio patrón, crear camisetas con su diseño...

Actividad 4. Puentes de Königsberg

Un río divide una ciudad en áreas separadas conectadas por puentes. ¿Es posible caminar por la ciudad cruzando todos los puentes exactamente una vez (y no más de una vez)? Se permite comenzar y terminar en cualquier lugar, y ambos pueden ser diferentes.
Intenta encontrar una ruta válida dibujando en los mapas provistos.

Actividad: 5. Doblar y cortar:

Toma un trozo de papel, dóblalo varias veces y haz un solo corte completamente recto.
Desdobla las dos piezas de papel.
Ahora piensa: ¿Qué formas se pueden obtener con un corte como ese?
Intenta doblar y cortar algunos de los ejemplos dados en la plantilla.

¡Crea y comparte!
Comparte los dibujos de los participantes y las plantillas adicionales que creaste utilizando el hashtag **# idm314paper** y **# idm314**.

Recursos y explicación matemática:

Mapas para colorear

El teorema de los cuatro colores es uno de los teoremas más famosos de las matemáticas. Establece que cualquier diseño o mapa siempre se puede colorear con cuatro colores (o menos).
Es importante porque se enunció por primera vez en 1852, pero no se demostró hasta 1976. Durante más de ciento veinte años, algunas de las mejores mentes matemáticas del mundo intentaron sin éxito probar uno de los teoremas más simples de las matemáticas. Hubo muchas demostraciones falsas, y se desarrolló una nueva rama de las matemáticas, conocida como teoría de grafos, para tratar de resolver el teorema. Pero nadie pudo probar el teorema hasta que Appel y Haken probaron el teorema en 1976 con la ayuda de un ordenador. Algunas personas piensan que, aunque su prueba era correcta, era una trampa usar un ordenador. ¿Tú qué piensas?

Pez-Octaedro

Un poliedro es una forma cerrada en el espacio tridimensional con caras planas, bordes rectos (aristas) y esquinas puntiagudos (vértices). Por ejemplo el cubo o una pirámide. El octaedro es otro ejemplo (imagina dos pirámides cuadradas pegadas por la cara cuadrada). Puedes imaginarlo encajado dentro de un cubo (con sus vértices tocado el centro de las caras del cubo). También puedes imaginar un cubo encajado similarmente dentro de un octaedro. Dos poliedros que se encajan mútuamente así se llaman duales. Intenta encontrar el dual de una pirámide.
Un poliedro se llama convexo, si al unir dos puntos de la superfiie con un segmento recto, éste segmento atraviesa el poliedro por su interior. El cubo, la pirámide y el octaedro son ejemplos de poliedros convexos. Los poliedros pueden ser muy diferentes entre sí, y pueden tienen muchas o pocas caras, aristas y vértices. Sin embargo, hay una propiedad que es la misma (invariable) para todos los poliedros convexos: toma un poliedro convexo y cuenta sus caras (C), aristas (A) y vértices (V). Si calculas V - A + C, obtendrás siempre el mismo número, el 2, sin importar el poliedro que elegiste. Este número se llama la característica de Euler y fue descrito por primera vez por el famoso matemático Leonhard Euler en 1758. Nota.: La característica de Euler puede ser diferente de 2 para poliedros no convexos, si tienen uno o más agujeros. En los poliedros convexos no puede haber agujeros.

Otras opciones:

- Juega al juego MatchTheNet: https://www.matchthenet.de/
- Construye otros poliedros usando estos desarrollos: https://imaginary.org/sites/default/files/matchthenet-polyhedra-nets.pdf
- Observa estas imágenes de poliedros y crea sus desarrollos: https://imaginary.org/sites/default/files/matchthenet-polyhedra-images.pdf
- Visita el curso de Mathigon sobre poliedros: https://mathigon.org/course/polyhedra/polygons
- Adopta un poliedro: https://www.polytopia.eu/en/

Mosaicos

Una teselación o mosaico es un patrón en una superficie plana (idealmente un plano que se extiende infinitamente) formado por formas (geométricas) llamadas teselas, sin espacios ni superposiciones. Si el patrón se repite, se llama mosaico periódico. De lo contrario, no es periódico.
Históricamente, las teselaciones se utilizaron en la antigua Roma y en el arte islámico. Los patrones formados por teselaciones periódicas se pueden clasificar en 17 grupos simetría.

Otras opciones:

- Dibuja tu propio mosaico en línea con iOrnament: https://imaginary.github.io/cindyjs-apps/iornament/index.html
- Consulta el curso de Mathigon sobre simetría y transformaciones: https://mathigon.org/course/transformations/introduction

Puentes de Königsberg

Uno de los primeros matemáticos en pensar en grafos y redes fue Leonhard Euler. Estaba intrigado por un viejo problema relacionado con la ciudad de Königsberg, cerca del mar Báltico (ahora Kaliningrado, Rusia). En el caso de Königsberg, parecía ser imposible encontrar una ruta válida a través de todos los puentes de la ciudad, cruzándolos todos exactamente una vez, pero en otras ciudades con ríos sí era posible. El problema está estrechamente relacionado con el problema de dibujar una figura (grafo) sin levantar el lápiz del papel y sin trazar la misma línea más de una vez. Cada mapas de una ciudad con puentes se puede convertir en un grafo con aristas y vértices: cada isla o región de tierra está representada por un vértice y cada puente que conecta dos regiones está representado por una arista correspondiente. Solo las conexiones son relevantes, por lo demás el grafo puede distorsionarse de cualquier manera, y las líneas no tienen por qué ser rectas.

Otras opciones:

Los niños y niñas pueden inventar algunos grafos y luego tratar de determinar cuáles se pueden dibujar con un solo trazo continuo. Para eso, es de ayuda anotar el grado de cada vértice de un grafo (el grado es el número de aristas que se encuentran en ese vértice). A través de una discusión conjunta, el grupo puede llegar a descubrir las condiciones que deben cumplirse en un grafo para poder trazarlo como hemos descrito. Por ejemplo: 1) el grafo debe ser conexo (estar conectado), 2) solo dos vértices pueden tener un grado impar, 3) si hay vértices de grado impar, la ruta debe comenzar en uno de ellos y terminar en el otro.

Un camino que pasa por cada arista de un grafo exactamente una vez (un vértice se puede visitar varias veces) se llama "camino euleriano". Si el camino comienza y termina en el mismo vértice, se llama "ciclo euleriano". El teorema de Euler establece: "Un grafo conexo tiene un ciclo euleriano si y sólo si cada vértice tiene un grado par". Fue demostrado en 1873 por Carl Hierholzer.
Prueba la versión en línea aquí:
https://mathigon.org/course/graph-theory/bridges.

Doblar y cortar

El teorema es el siguiente: todo diseño (grafo plano) que se pueda hacer cortando un papel con segmentos de líneas rectas se puede hacer también doblando el papel y haciendo un único corte recto. Por lo tanto, es posible hacer polígonos (incluso no convexos), múltiples polígonos disjuntos, polígonos anidados, polígonos adyacentes e incluso cortes como un segmento flotante.
Encuentre más información aquí: http: // erikdemaine.org/foldcut/

Créditos y licencia

La actividad “Mapas para colorear” se basa en una actividad de Rod Pierce. Las imágenes en la plantilla se usan con su permiso. La actividad original se puede encontrar en el sitio web Math is Fun www.mathsisfun.com.

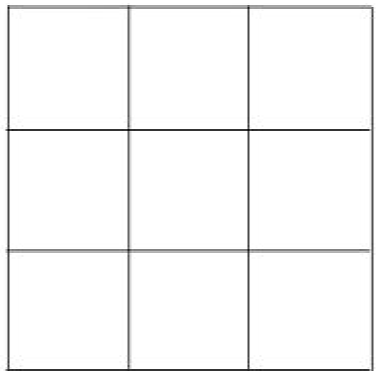
Las plantillas del “Pez-Octaedro” y los “Mosaicos” fueron creadas por Robert Fathauer y se usan con su permiso.

La actividad de los “Puentes de Königsberg” se basa en un curso de Mathigon www.mathigon.org. Las imágenes de los mapas se utilizan con permiso de Philipp Legner.

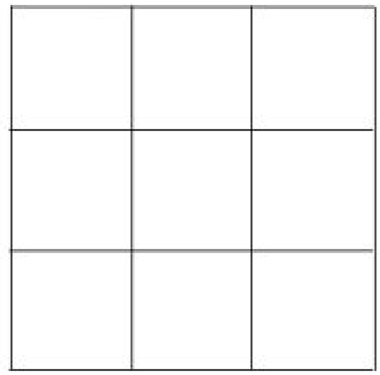
La actividad de “Doblar y cortar” se basa en la descripción de Eric Demaine dada aquí: http://erikdemaine.org/foldcut/ Las plantillas para esta actividad fueron creadas por Christiane Rousseau.

Plantilla de Mapas para Colorear (página 1 de 3)

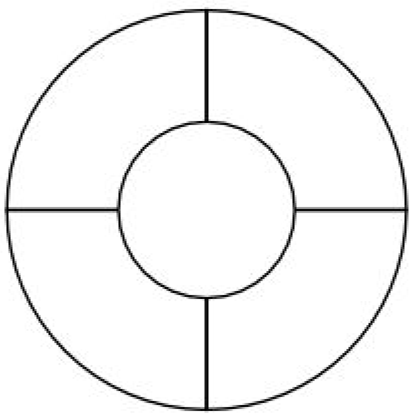
Prueba diferentes colores para la misma figura o colorea sólo uno de ellos:



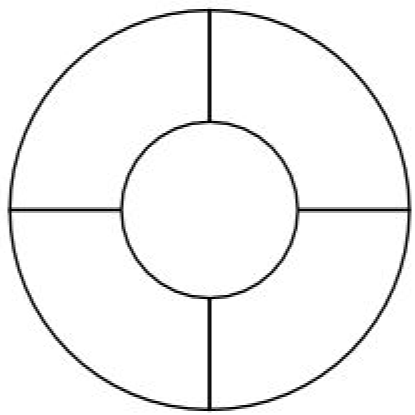
de colores: ____



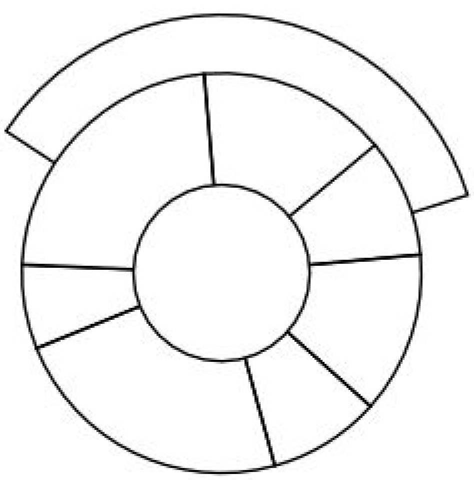
de colores: ____



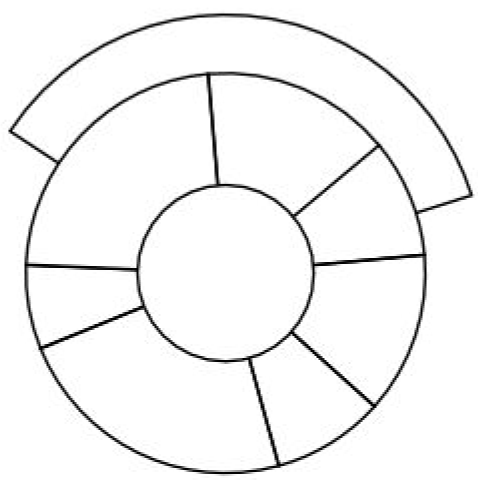
de colores: ____



de colores: ____



de colores: ____

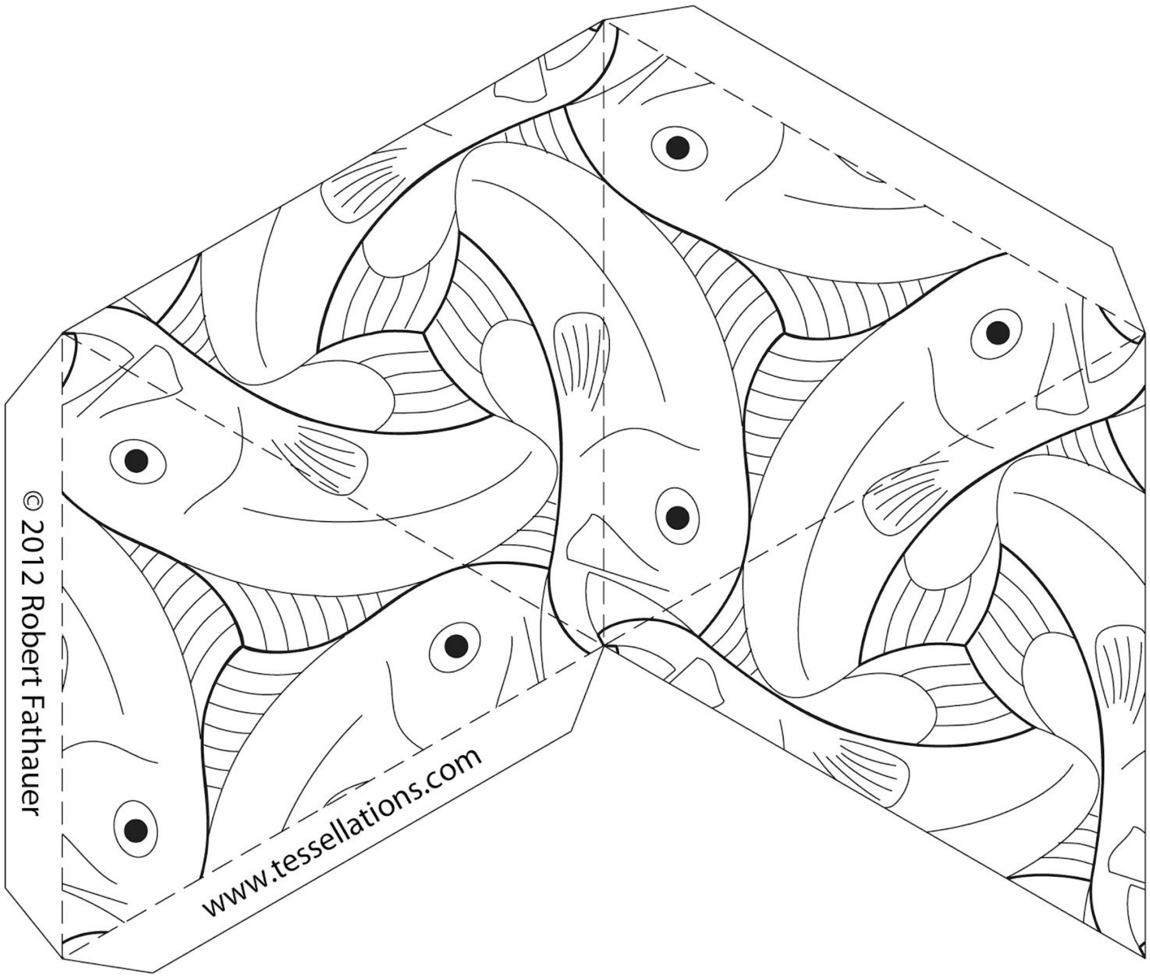


de colores: ____

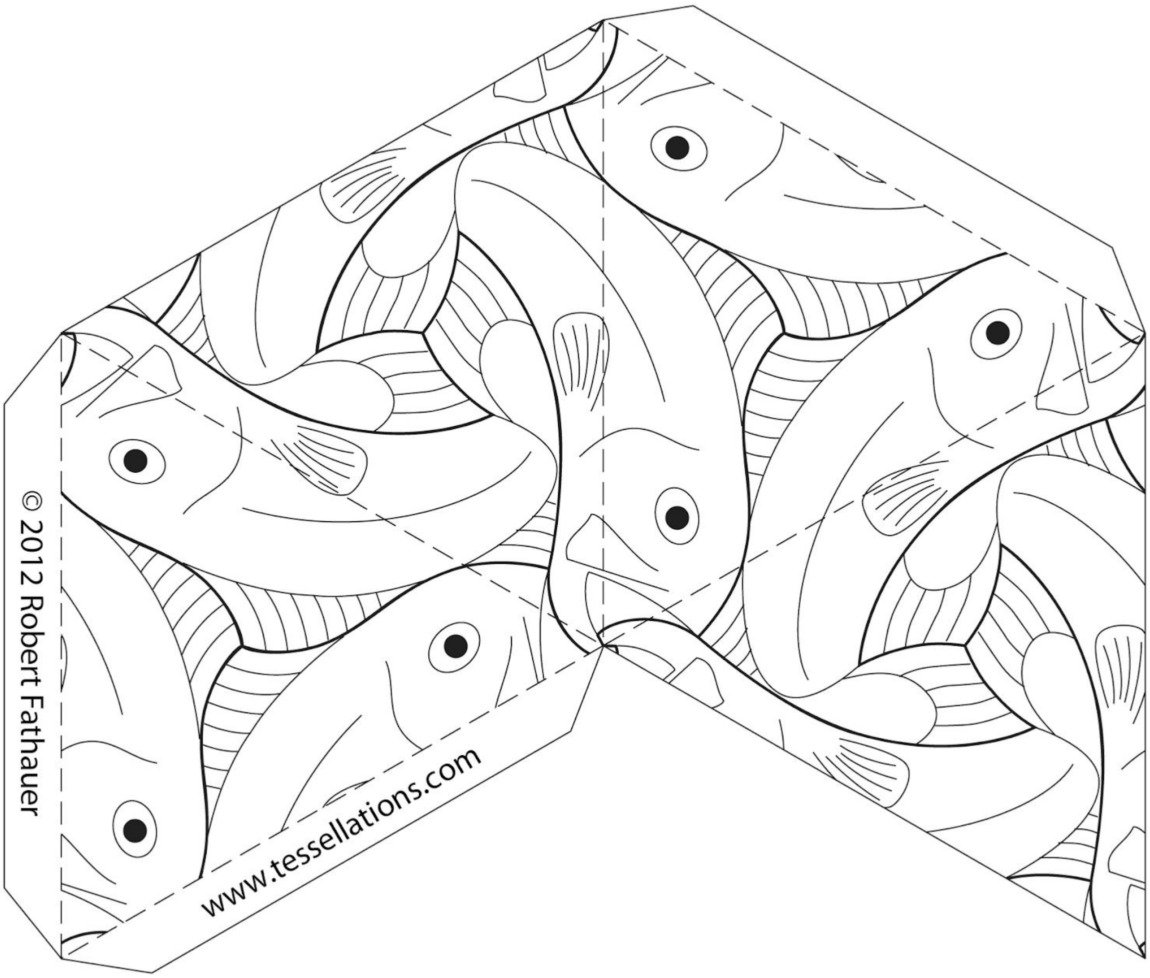
Plantilla de Mapas para Colorear (página 2 de 3)

Plantilla de Mapas para Colorear (página 3 de 3)

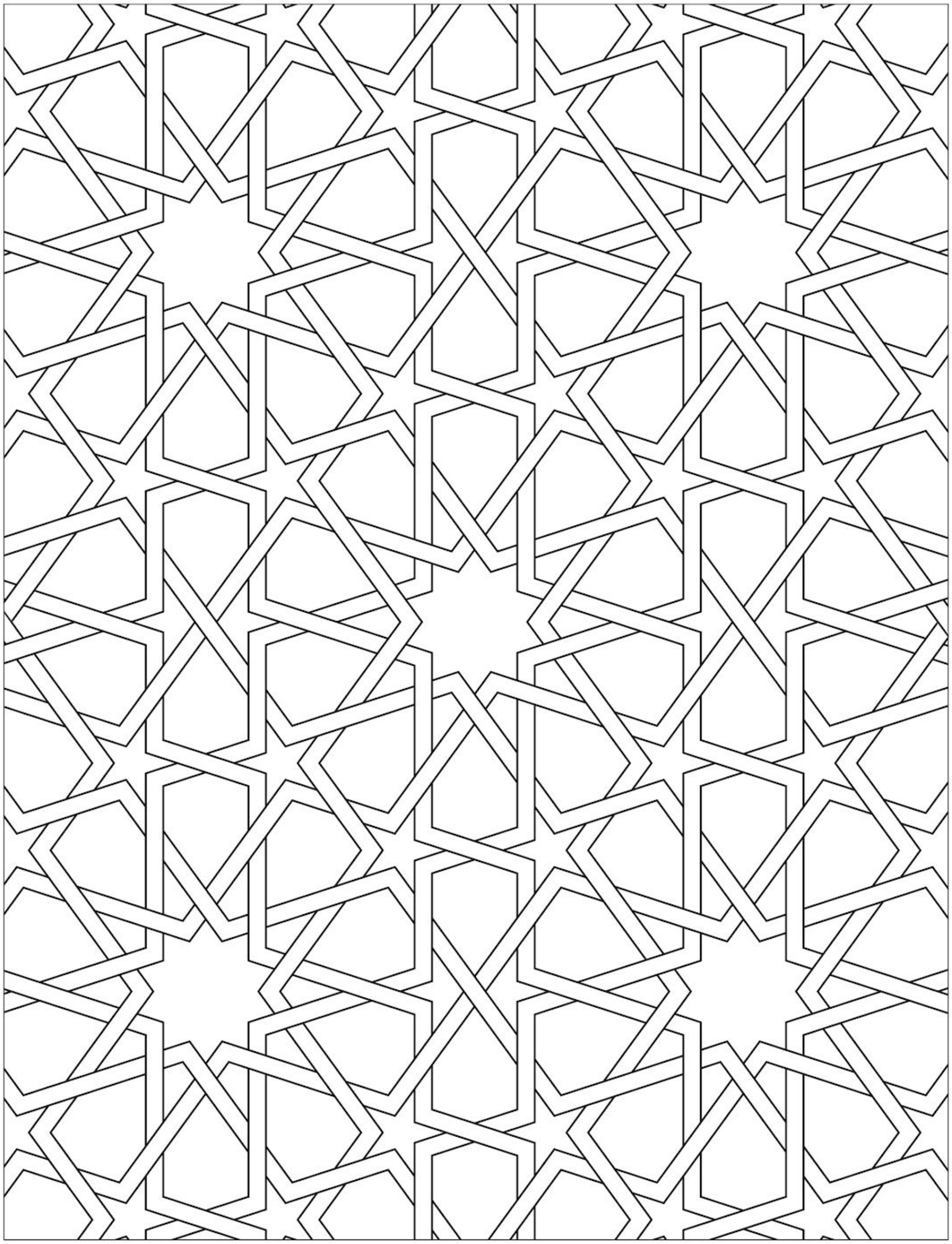
Plantilla para el Pez-Octaedro (página 1 de 2)



Plantilla para el Pez-Octaedro (página 2 de 2)

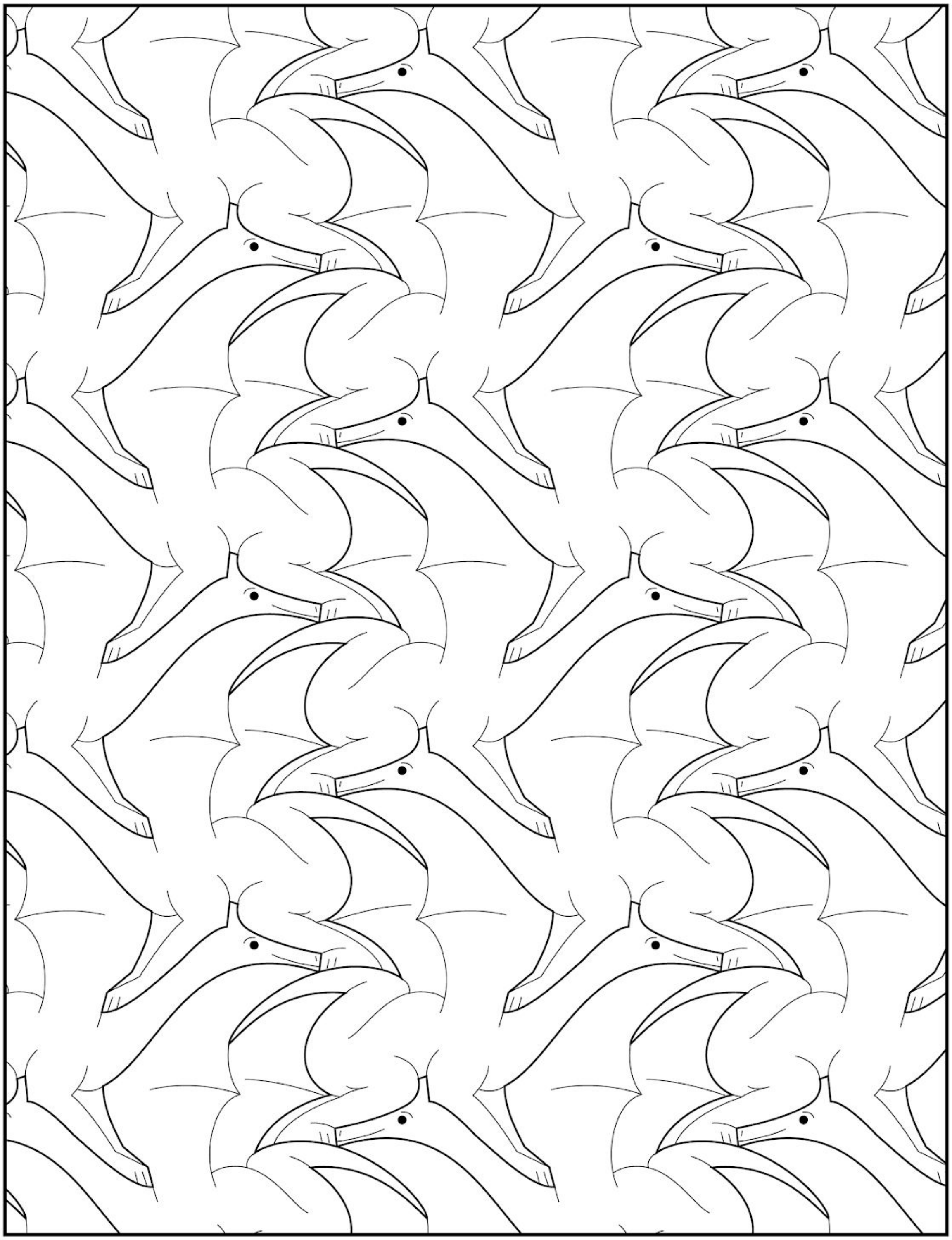


Plantilla para el Mosaico (página 1 de 2)



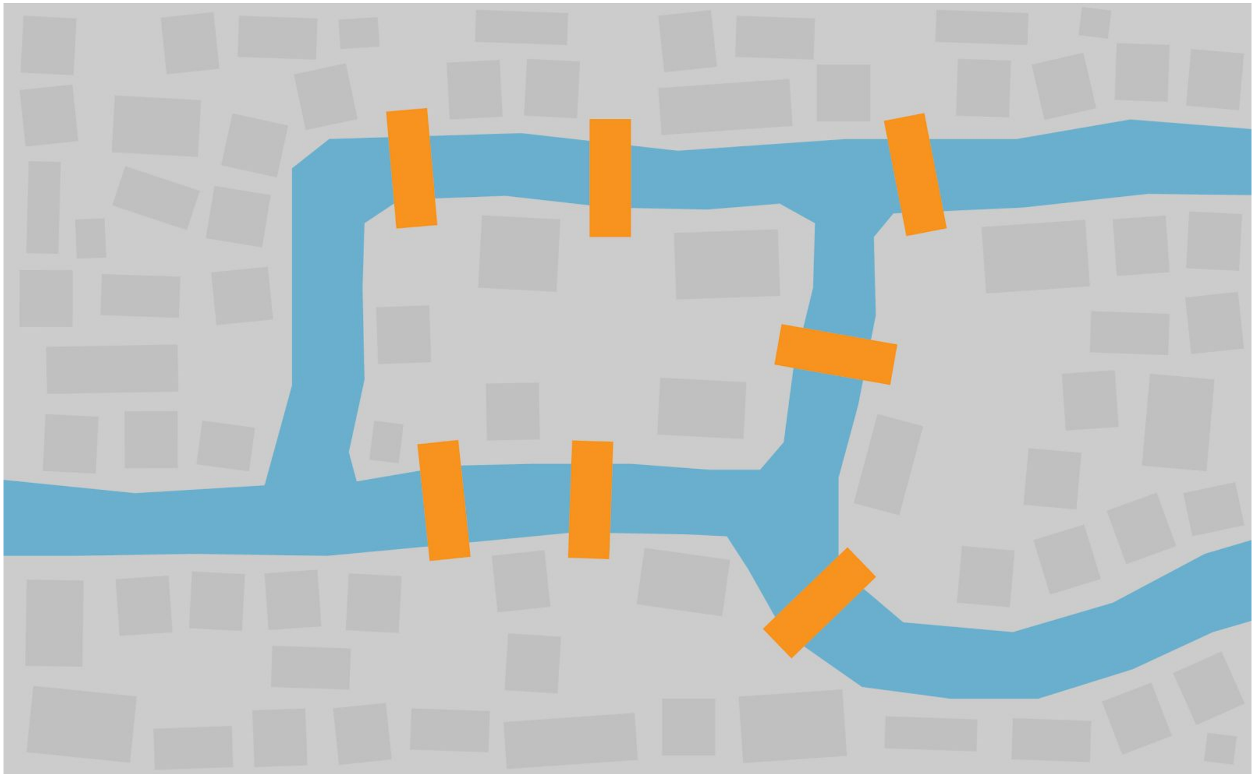
www.tessellations.com

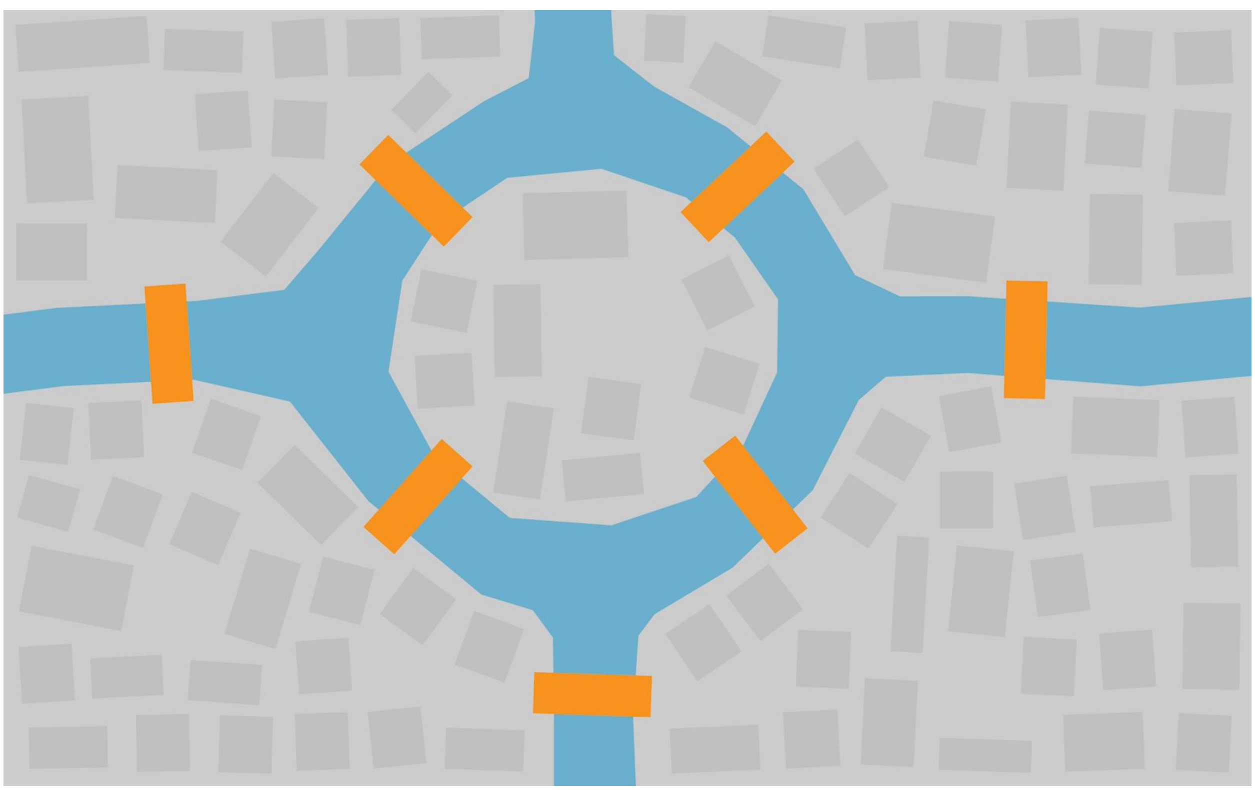
Plantilla para el Mosaico (página 2 de 2)



www.tessellations.com "Dragons" © 2003 Robert Fathauer

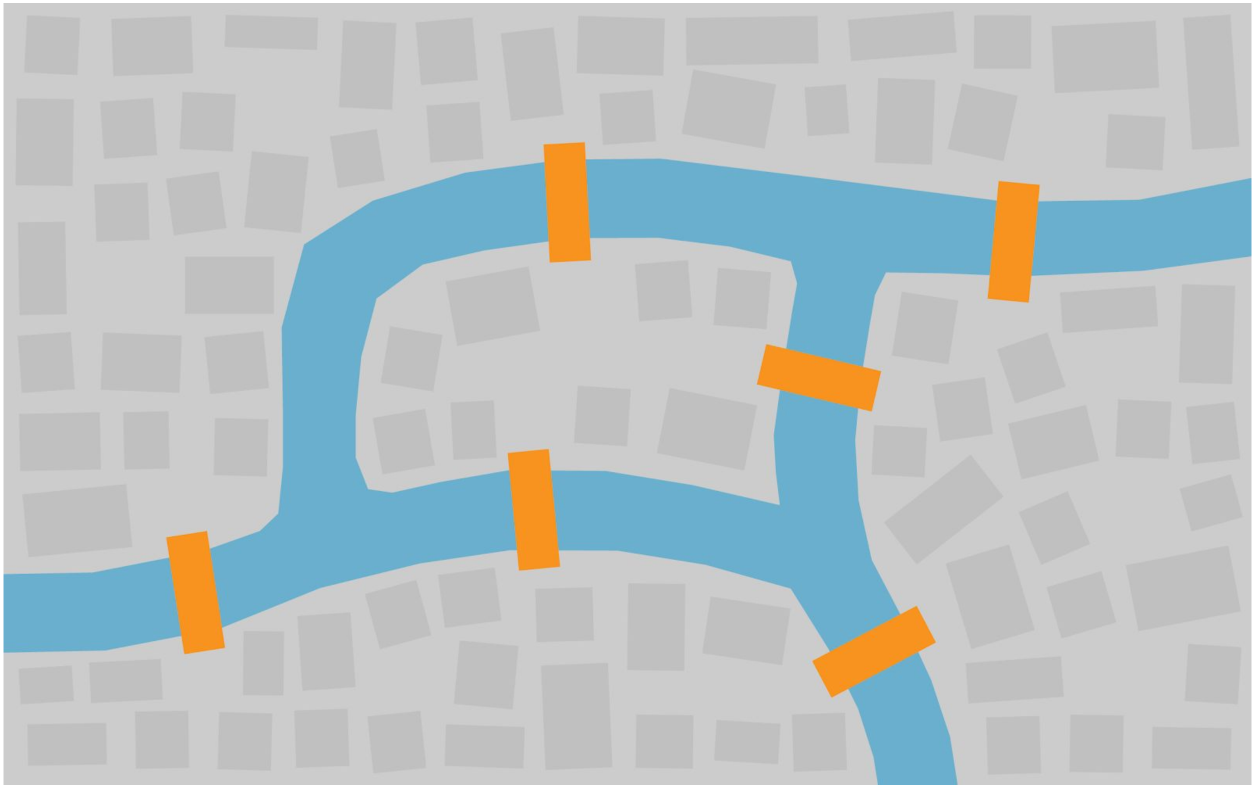
Plantilla para los Puentes de Königsberg (página 1 de 2)

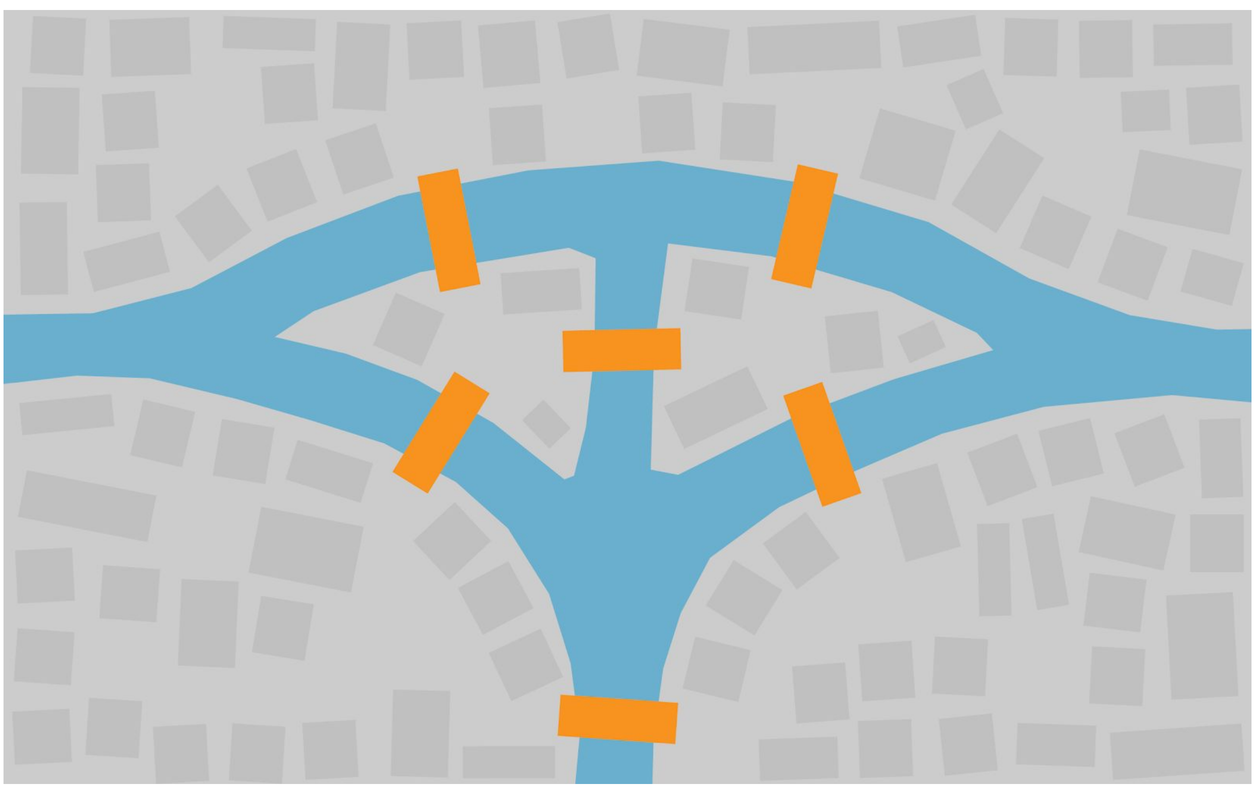




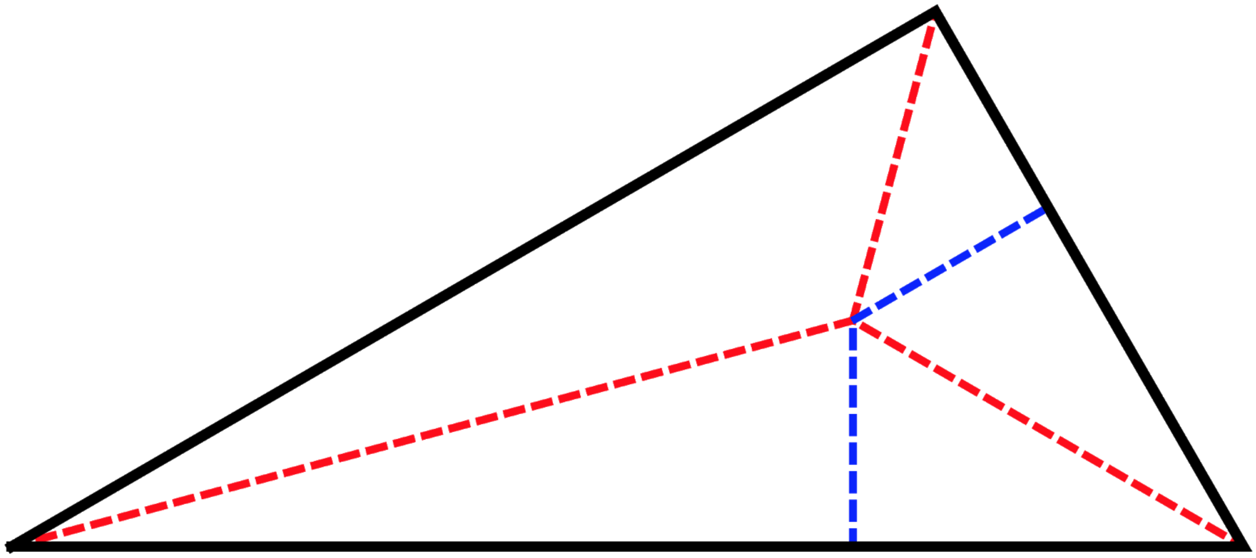
www.mathigon.org

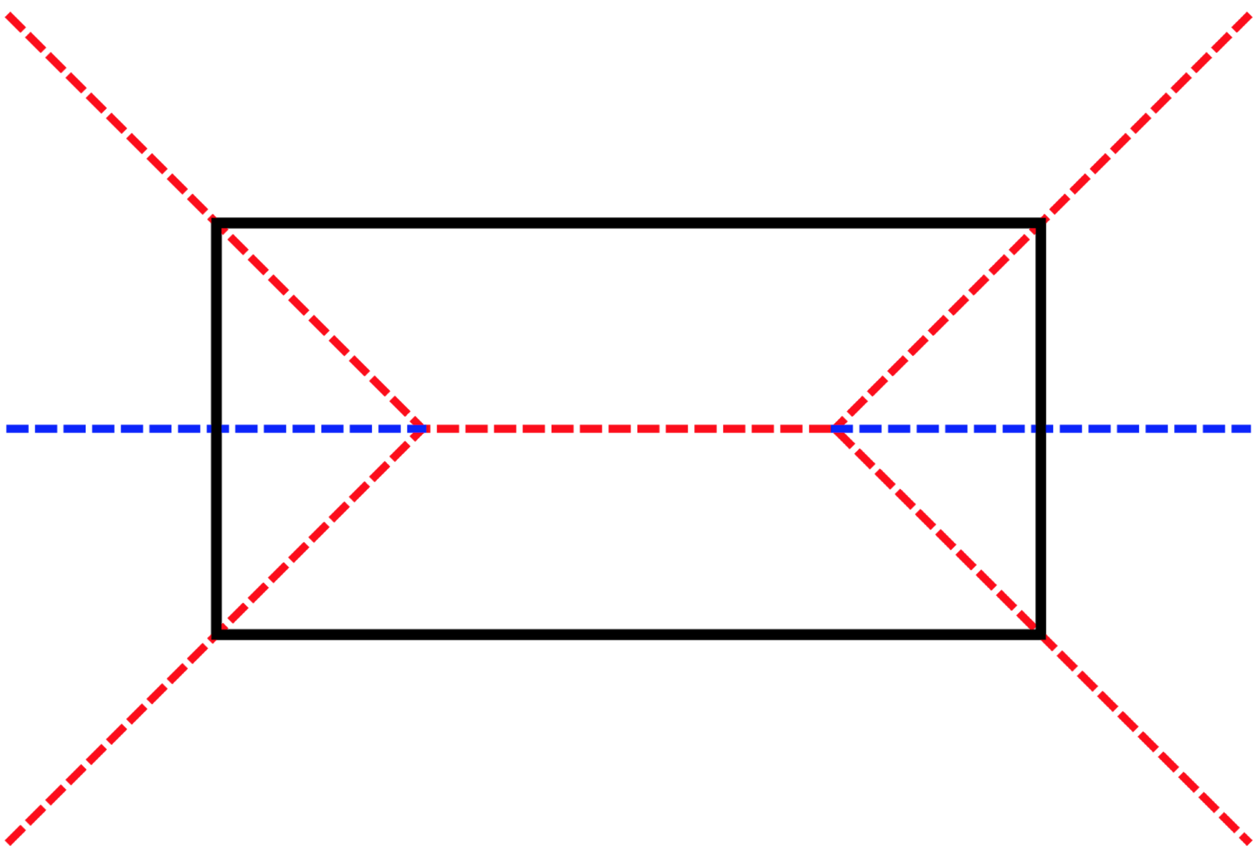
Plantilla para los Puentes de Königsberg (página 2 de 2)



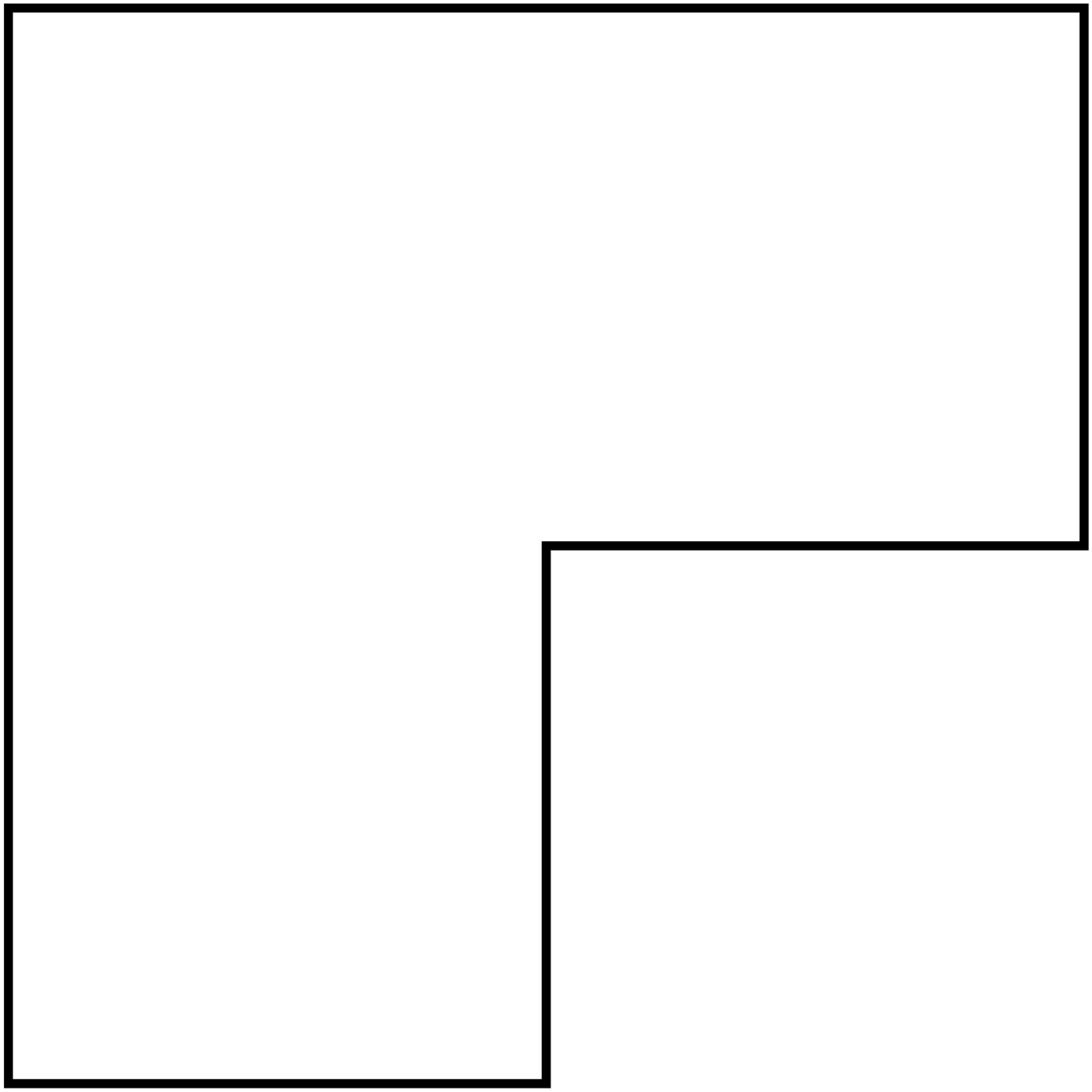


Plantilla para Doblar y Cortar

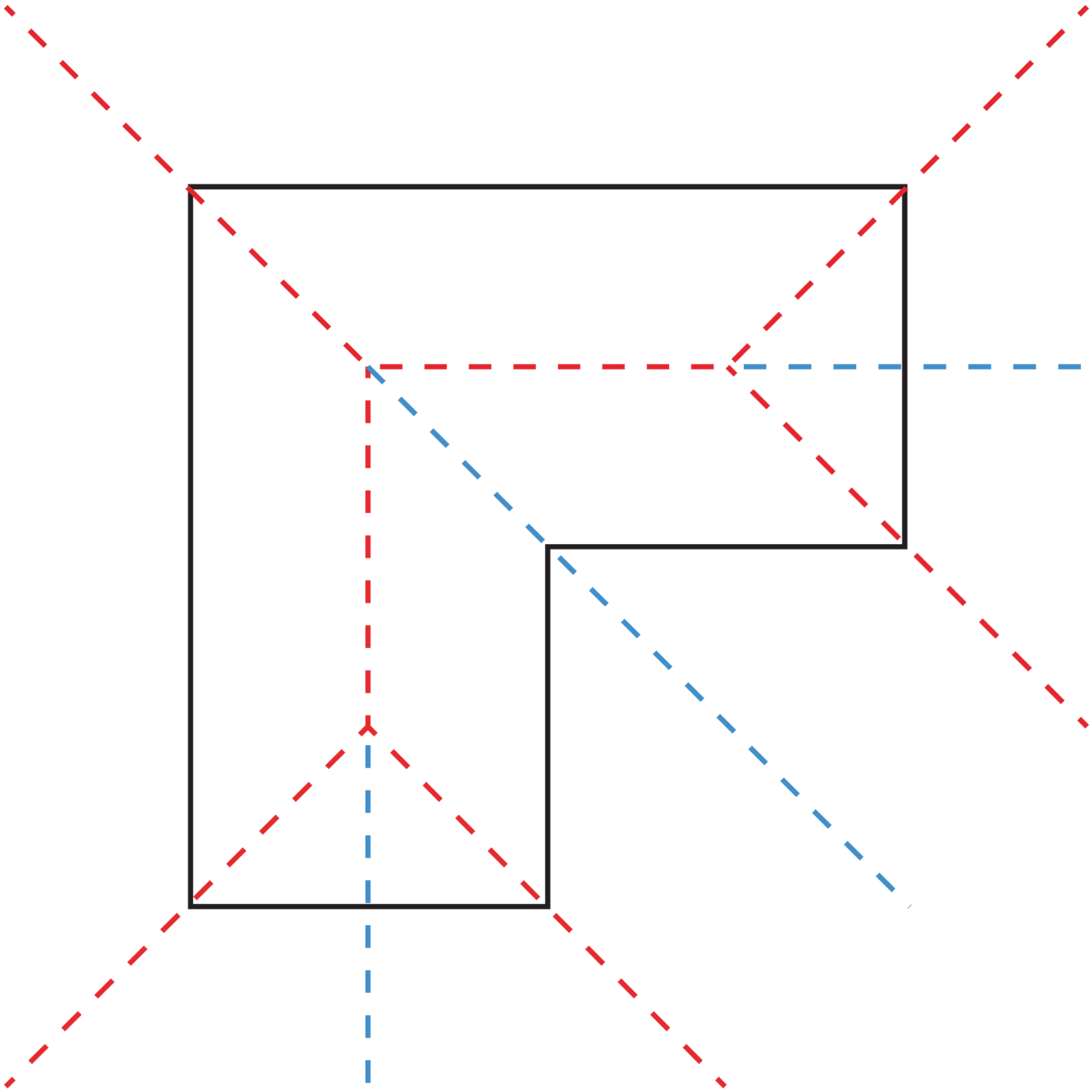




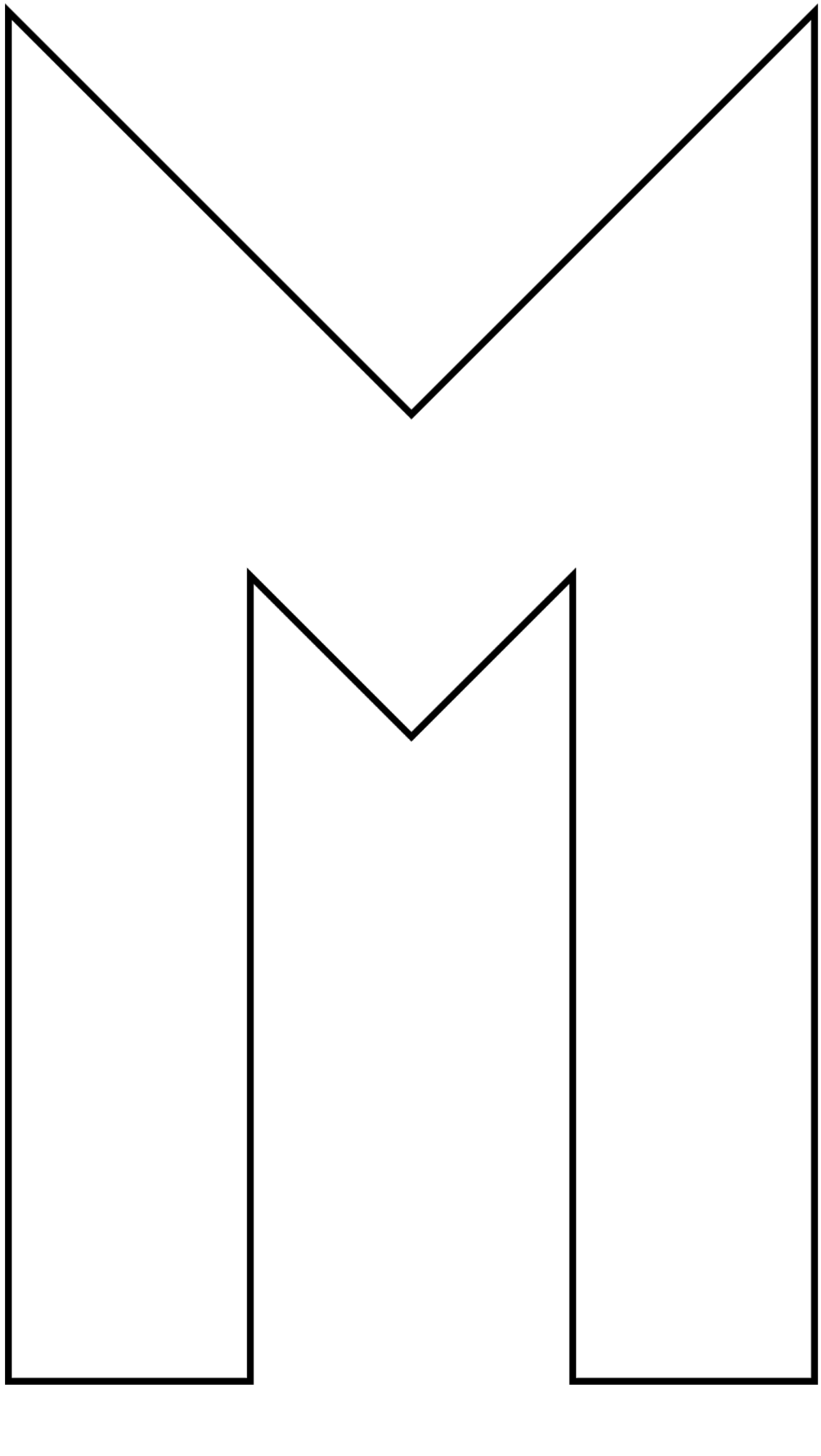
Plantilla para Doblar y Cortar



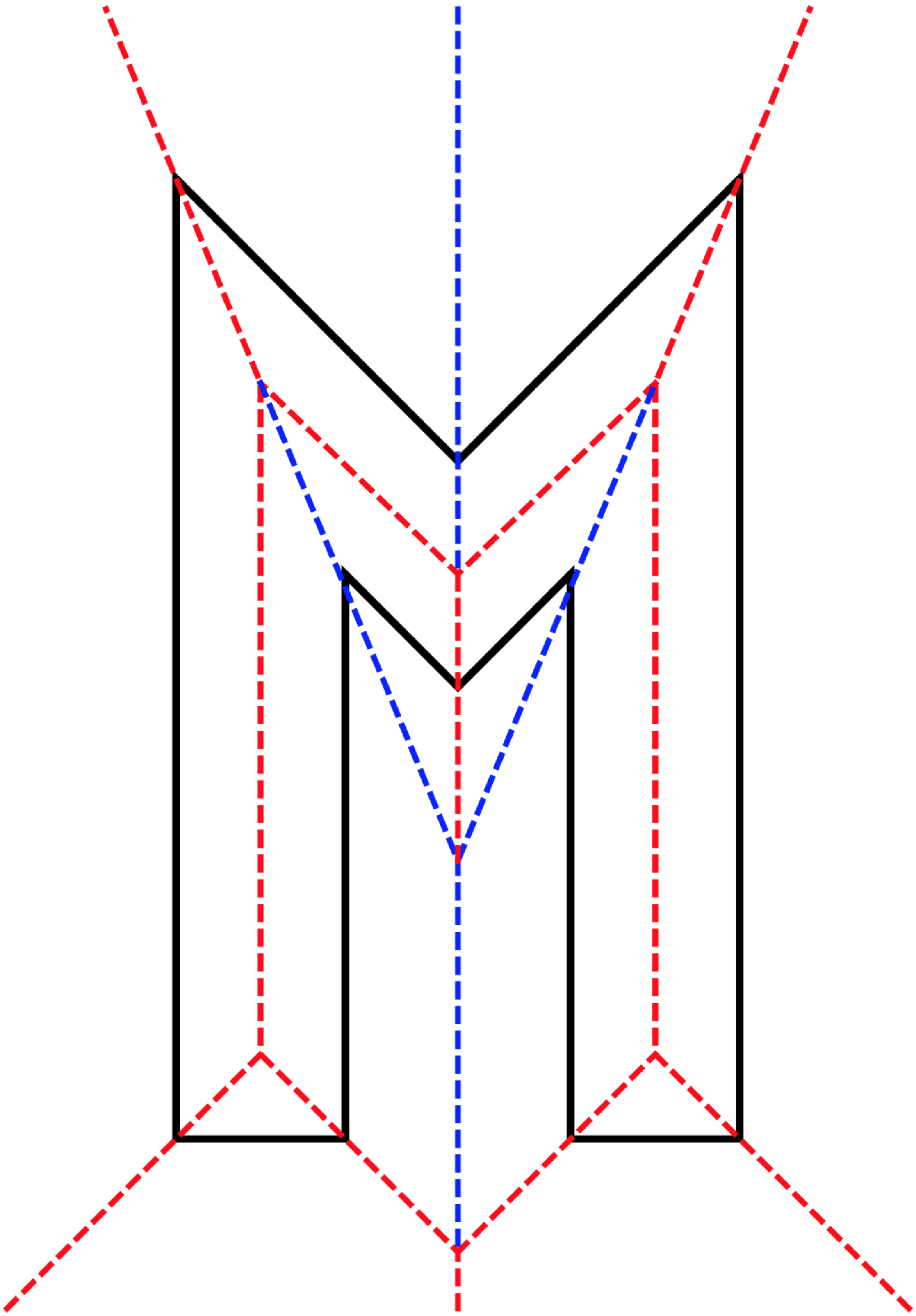
Plantilla para Doblar y Cortar



Plantilla para Doblar y Cortar



Plantilla para Doblar y Cortar



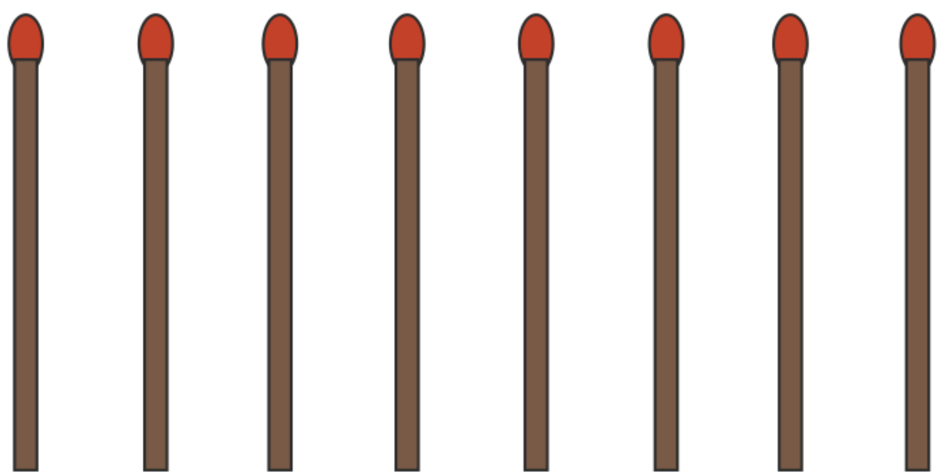
Juegos matemáticos

Participantes:
A partir de 10 años. Algunas actividades son aptas para mayores de 15 años.

El juego de NIM:

Este es un antiguo juego de estrategia para dos jugadores cuyo origen es incierto (algunos creen que es de China). Existen muchas variantes.

1. *Primera variante:* Se colocan una cierta cantidad de cerillas (se pueden usar otros objetos: dedos, palos, lápices…) sobre la mesa, en fila .

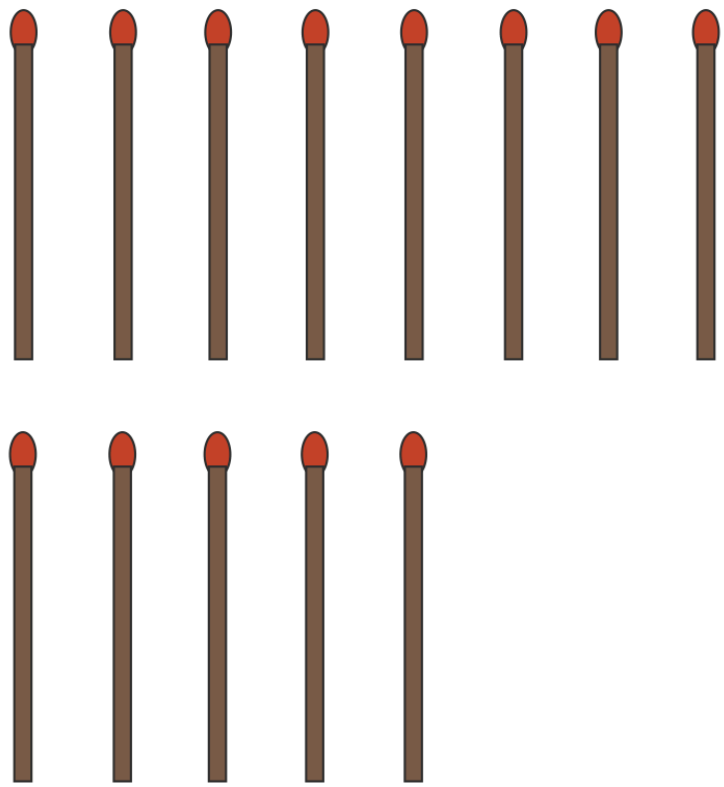
   

   Cada persona que juega, por turnos, puede eliminar una, dos o tres cerillas. Gana quien se lleva la última cerilla: este es el “juego codicioso”.
   Intente encontrar una estrategia ganadora. Esta estrategia ganadora es la siguiente: dejar en el tablero siempre un número de cerillas que sea múltiplo de cuatro. Si originalmente hay un múltiplo de cuatro, quien juega primero está en posición perdedora; de lo contrario, quien juega primero está en posición ganadora. Intente demostrar esta afirmación.

2. *Segunda variante*: Partimos de la misma configuración, una fila con un cierto número de cerillas. Esta vez, pierde quien se lleva la última cerilla: este es el “juego *misère*”.

Intente encontrar una estrategia ganadora. Esta estrategia ganadora es la siguiente: dejar el tablero con un número de cerillas que sea múltiplo de 4 más uno. Si originalmente hay un múltiplo de cuatro más uno, quien juegue primero está en posición perdedora; de lo contrario, está en posición ganadora.

3. Pruebe a proponer a un grupo de estudiantes la versión codiciosa, y a otro grupo la versión misère. Luego mezcle ambos grupos y haga que en cada pareja haya una persona que haya practicado con cada una de las dos versiones. Jueguen varias veces, alternando la versión jugada, la persona que comienza, y el número de cerillas.
4. *Tercera variante:* El juego ahora tiene varias filas, y cada fila puede contener cualquier número de cerillas.



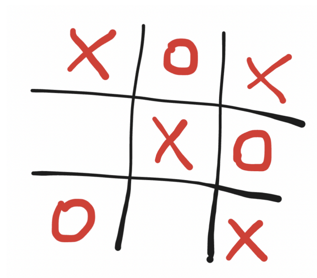
Las dos personas se alternan y cada una toma cualquier número de cerillas de cualquier fila. Gana quien toma la última cerilla.

   a. Pruebe a jugar con 2 filas. Demuestre que la estrategia ganadora consiste en equilibrar el tablero: gana quien consiga hacer que las dos filas tengan el mismo número de elementos.
   b. Tomemos nuevamente 2 filas y cambiemos la regla ganadora a la versión misère: pierde quien toma la última cerilla. Demuestre que la estrategia ganadora es la misma durante la mayor parte del juego: intente equilibrar el tablero para obtener tamaños iguales en ambas filas, por ejemplo, (5,5) o (4,4), o (3,3), o (2,2). Cuando alcance la posición (2,2), debe jugar de manera diferente. Explique cómo.

c. Pruebe ahora con tres filas con igual número de cerillas. Muestre que quien juegue en segundo lugar tiene una estrategia ganadora, reduciendo el tablero a dos filas.
d. Pruebe ahora con 3 filas con diferente número de cerillas. Construya una serie de “posiciones ganadoras”, por ejemplo (0,0,1), (1,1,1), (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (1, 8, 9), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (4, 8, 12), (4, 9, 13), (5, 8, 13), (5, 9, 12), etc. Verifique que quien se encuentre en una de esas posiciones tiene una manera de ganar. Para ello, muestre que sea cual sea el movimiento de su oponente, esta persona puede volver a otra posición de la lista, con menos cerillas, lo que le lleva a la victoria.
e. Haga lo mismo con 4 filas y compruebe que llegar a una de las siguientes configuraciones es una estrategia ganadora: (1, 1,n,n) para cualquier n, (1, 2, 4, 7), (1, 2, 5, 6), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 5, 7), (2, 3, 4, 5) , (2, 3, 6, 7), (2, 3, 8, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 8, 9), (m,m,n,n) para cualquier m, n.
f. El caso general está explicado en el apéndice , y está recomendado para para edades entre 15 y 18 años. Es útil conocer el sistema de numeración en base 2.

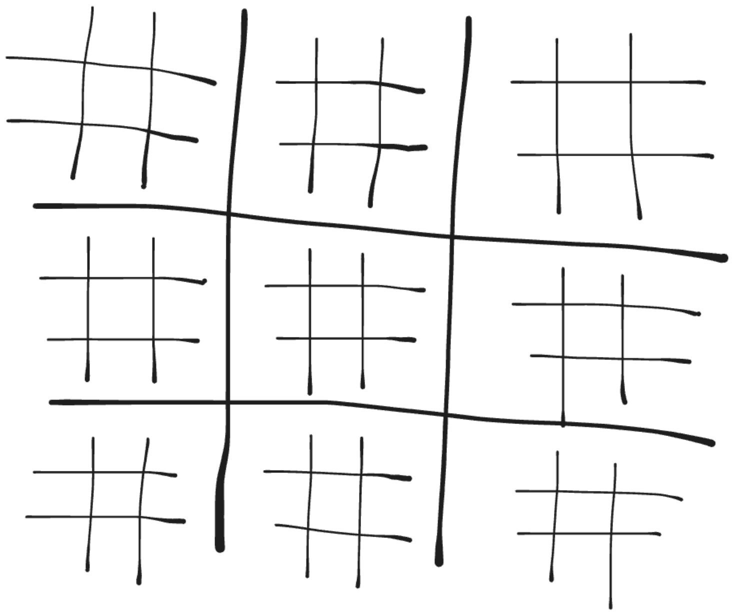
El juego de Tres en raya (Tic Tac Toe) y algunas generalizaciones:

El juego de Tres en raya (también conocido como ceros y cruces, tres en línea, cerito cruz, michi, triqui, cuadritos, tatetí y muchas otras variantes) se remonta al antiguo Egipto. En una cuadrícula de 3x3, cada participante coloca su símbolo (X u O) en un cuadrado, por turnos. Gana quien primero alinee tres símbolos iguales en una fila, columna o diagonal.

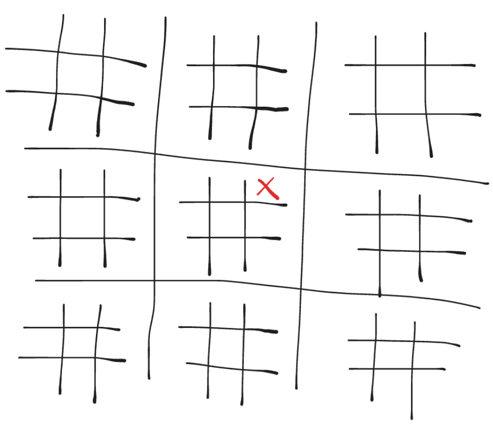


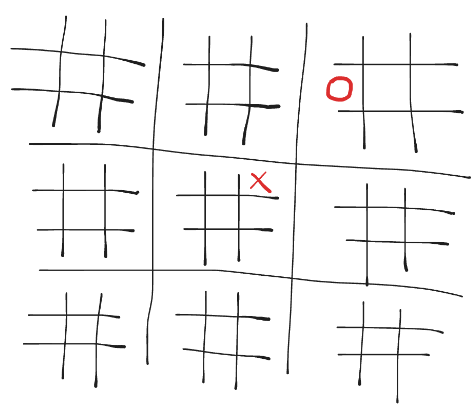
- Demuestre que si todos los jugadores juegan inteligentemente, nadie gana. Esto se puede hacer determinando un movimiento estratégico para cada movimiento posible del oponente.
- Una generalización es jugar en una cuadrícula tridimensional de 3x3x3. Demuestre que quien juegue en primer lugar tiene una estrategia ganadora consistente en colocar su signo en el cubo central. Demuestre esta afirmación describiendo cada respuesta del primer jugador a cada movimiento de su oponente.
- Pruebe a jugar en una cuadrícula de 4x4. Gana quien primero coloca 4 de sus marcas en una fila horizontal o vertical, o en un cuadrado de 2x2, o en las cuatro esquinas de la cuadrícula. Experimente estrategias para este juego.

El juego de Súper Tres en raya (Ultimate Tic Tac Toe)
En una cuadrícula grande de 3x3, cada cuadrado contiene una cuadrícula más pequeña de 3x3 para jugar al tres en raya..



El primer jugador puede jugar con su símbolo (X u O) en cualquier casilla de cualquier cuadrícula pequeña. Cada movimiento determina cuál de las pequeñas cuadrículas se utilizará en el siguiente turno. Por ejemplo, si el primer jugador coloca una X en el cuadrado superior derecho de la cuadrícula pequeña central, la siguiente jugadora debe colocar una O en algún lugar de la cuadrícula pequeña ubicada en la esquina superior derecha de la cuadrícula grande.





Ejemplo de los primeros movimientos de un juego. Para el primer movimiento, el jugador 1 puede poner una X en cualquier lugar. Dado que el jugador 1 jugó en la esquina superior derecha, la jugadora 2 tendría que poner una O en algún lugar de la cuadrícula superior derecha. Para el tercer movimiento, el jugador 1 tendrá que poner una X en alguna casilla de la pequeña cuadrícula situada en la columna 1 y la fila 2 de la cuadrícula grande.

Cada vez que alguien logra formar tres en línea en una cuadrícula pequeña, ese cuadrado grande de la cuadrícula grande le pertenece. Gana el juego quien logra ganar la gran cuadrícula del tres en raya, ganando tres tres en raya más pequeños en línea.

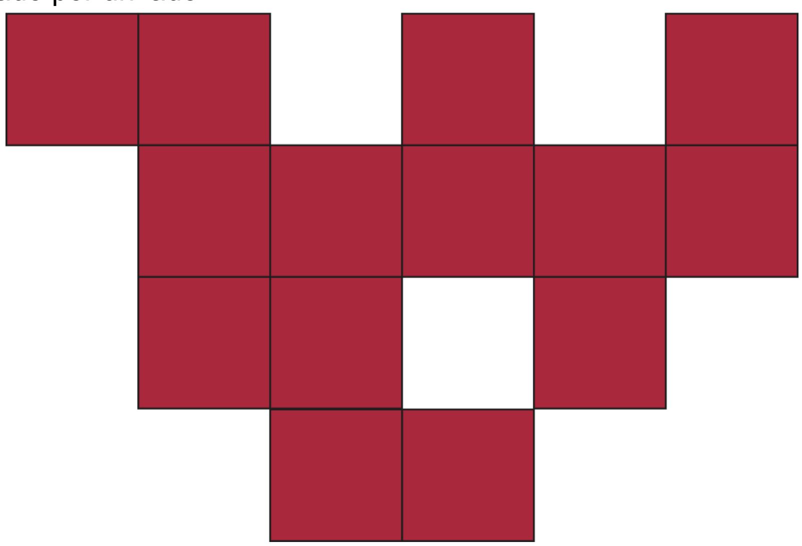
Si alguien es enviado a una cuadrícula que está llena, o que ya ha sido ganada, entonces esta persona puede elegir cualquier otra cuadrícula pequeña para colocar la siguiente X u O.

Referencia:https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tic-tac-toe

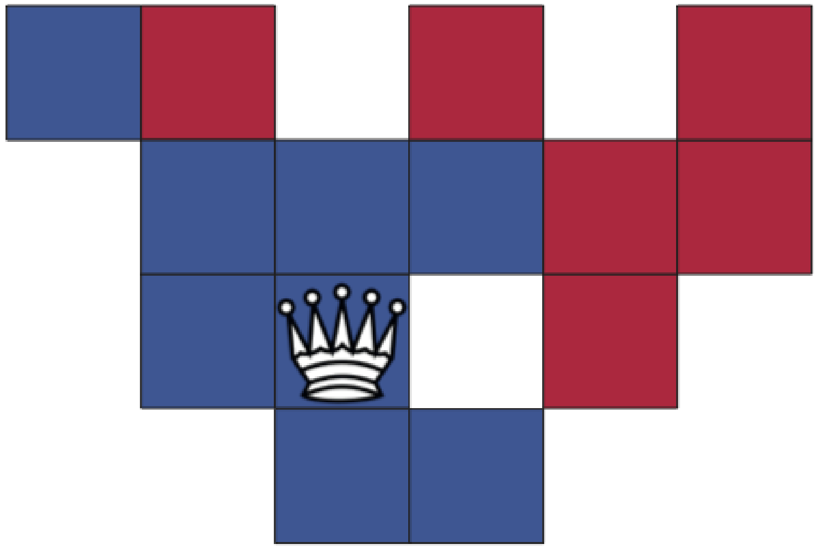
Reinas en tableros de ajedrez

En un tablero de ajedrez, la reina puede moverse en horizontal, en vertical y diagonalmente. Una reina está amenazada por otra reina si la segunda reina puede moverse a la posición de la primera reina, ya sea horizontal, vertical o diagonalmente.

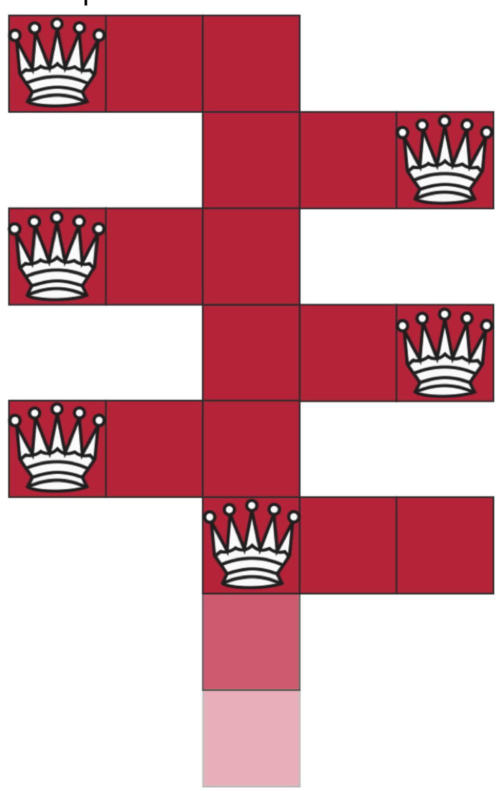
- Tome un tablero de ajedrez de 4x4 y coloque cuatro reinas, de modo que ninguna de ellas se amenace entre sí.
- Haga lo mismo con un tablero de ajedrez de 5x5 y cinco reinas.
- Haga lo mismo con un tablero de ajedrez de 6x6 y seis reinas.
- Es posible generalizar la forma del tablero de ajedrez a un poliminó, que es un conjunto conectado de cuadrados, siendo cada cuadrado adyacente al menos a otro cuadrado por un lado.



La cuestión entonces es determinar el número mínimo de reinas necesarias para amenazar todas las casillas delpoliomino.Aquí están las casillas amenazadas por una reina.



- Para este poliminó, tres reinas son suficientes. ¿Puede colocarlas?
- El resultado general es que si el poliminó tiene n casillas, entonces siempre será posible amenazar todas las casillas con como máximo m reinas, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$. En el siguiente ejemplo, que tiene 18 casillas (o 19 o 20 si sumamos una o ambas casillas inferiores transparentes), no es posible usar menos de 6 reinas para amenazar todas las casillas.



Esto se puede generalizar a un poliminó con $3n$ cuadrados (o $3n + 1$, o $3n + 2$ cuadrados) para los cuales al menos n reinas son necesarias para amenazar todas las casillas.

- Dibuje otros poliminós y determine en cada caso el número mínimo de reinas necesarias para amenazar todas las casillas.
- La demostración de que a lo sumo m reinas son suficientes, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$ está contenida en el Apéndice 2, y está recomendada para edades de 15 a 18 años.

¡Cree y comparta!
Cree nuevas reglas para los juegos mencionados anteriormente y compártalas usando el hashtag **#idm314juegos** y **#idm314**.

Referencias

Para el Super Tres en raya:
https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_tic-tac-toe
Juego en línea con IA: https://www.uttt.ai/

Para las reinas en poliminós (en francés):
https://accromath.uqam.ca/2022/09/des-dames-sur-detranges-echiquiers/
Juego en linea: www.erikaroldan.net/queensrooksdomination

Apéndice 1. El caso general del juego de Nim:

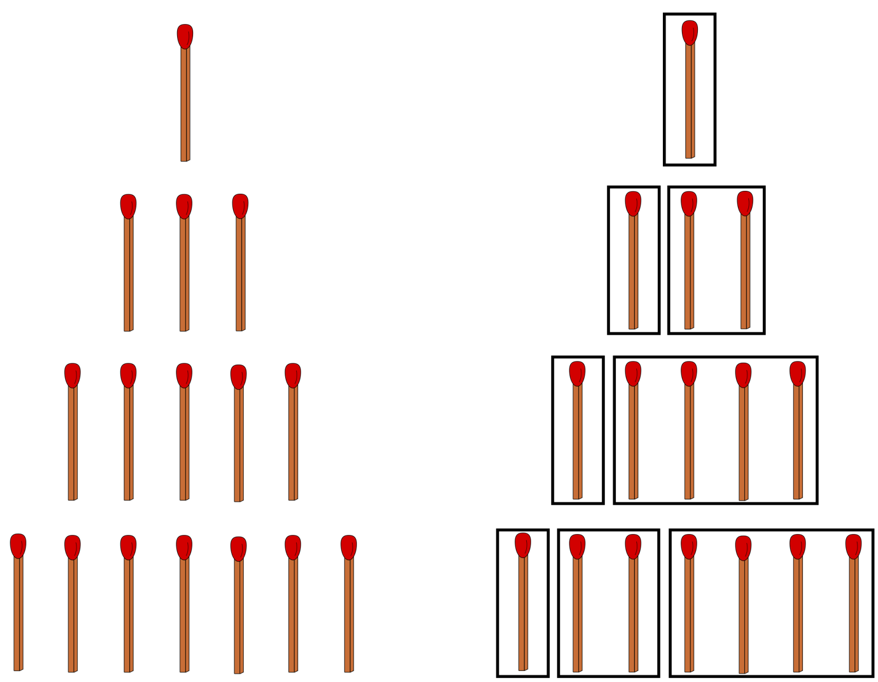
La estrategia ganadora para 3 o más filas (como ocurre con dos filas) pasa por mantener el juego “en equilibrio”, pero eso tiene un significado preciso y sutil.

En cada fila se pueden formar grupos de 1, 2, 4, 8… (potencias de 2) cerillas. Estos grupos son únicos (salvo reordenar las cerillas) y hay como máximo uno de cada uno de estos grupos por fila (esto equivale a descomponer un número en binario, por ejemplo 13 = 8 + 4 + 1).

Cuente el número de grupos de 1 cerilla, el número de grupos de 2 cerillas, etc. Decimos que el tablero está equilibrado si hay un número par de cada uno de esos grupos.

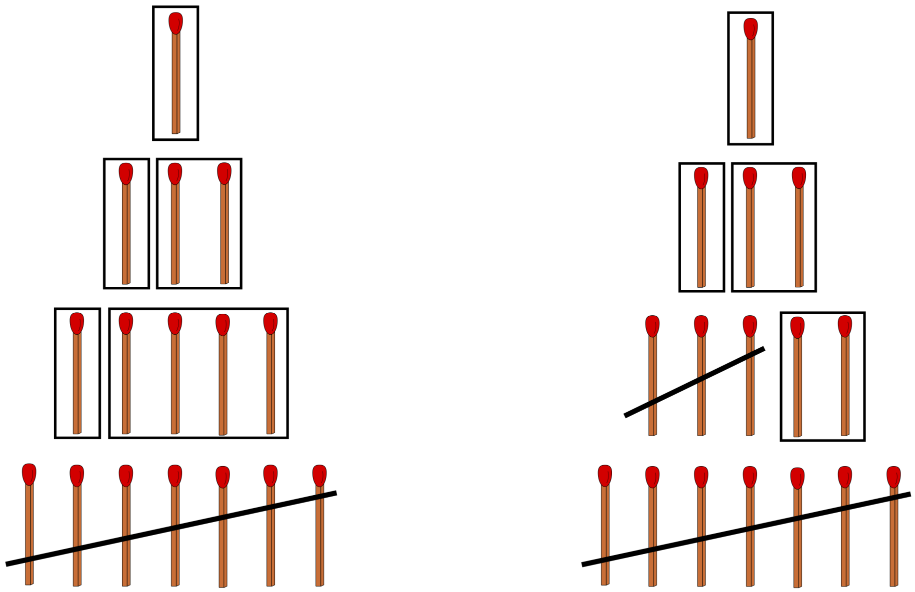
La estrategia ganadora consiste en dejar siempre el tablero equilibrado. Esto siempre es posible desde una posición desequilibrada.

Veamos un ejemplo, una configuración popular de NIM en forma de pirámide, que consta de cuatro filas con 1,3,5 y 7 coincidencias:



Este tablero comienza en un estado equilibrado: hay un número par de grupos de 1 cerilla (4 grupos), un número par de grupos de 2 cerillas (2 grupos) y un número par de grupos de 4 cerillas (2 grupos). Quien empiece a jugar necesariamente romperá el equilibrio y, por lo tanto, estará en una posición perdedora.

Supongamos que su oponente empieza a jugar y usted juega una estrategia ganadora. Si su oponente elimina un grupo de 1, 2 o 4, usted puede eliminar otro grupo igual. Si su oponente elimina, por ejemplo, toda la última fila (eliminando un grupo de 1, un grupo de 2 y un grupo de 4), su tarea será equilibrar nuevamente el tablero. Ciertamente, necesita destruir el otro grupo de 4 (de lo contrario el juego quedará desequilibrado), por lo que usted debe jugar en la fila 3 eliminando algunas cerillas. Las otras dos filas en las que no jugará (filas 1 y 2) tienen dos grupos de 1 y un grupo de 2, por lo que solo necesita otro grupo de 2 para equilibrar. Por lo tanto, su movimiento es dejar sólo un grupo de 2 cerillas en la fila 3 (es decir, quitar 3 cerillas y dejar 2).



Un posible primer y segundo movimiento en este juego de NIM. El segundo movimiento restablece el equilibrio.

En general, debe fijarse en el bloque más grande que su oponente dejó desequilibrado y actuar en una fila que tenga un bloque coincidente del mismo tamaño. A continuación, vea todas las demás filas y comprueba qué grupos están equilibrados y qué grupos no lo están. Siempre podrá equilibrar el tablero.

La clave de esta estrategia (el teorema matemático que demuestra que esta estrategia funciona) consta de dos enunciados: a) Si el tablero está equilibrado, quedará desequilibrado con cualquier movimiento, dejándolo en una posición perdedora. b) Si el tablero está desequilibrado, siempre hay un movimiento que lo equilibra, dejándolo en una posición ganadora.

Si queremos escribirlo en notación en base 2:

Consideremos un juego de Nim con m filas, que contienen respectivamente $n_1,\ldots,n_m$ cerillas. Escribimos cada uno de los números $n_1,\ldots,n_m$ en base 2. Cada número es entonces una suma de potencias 2^i para algnunos $i = 0, \ldots, N$. Cuente cuantas veces una potencia dada 2^i aparece en todos $n_1,\ldots,n_m$. Si aparece un número par de veces, entonces definimos $a_i = 0$. Si aparece un número impar de veces, entonces definimos $a_i = 1$. Por ejemplo. Partimos de tres filas con 9, 5 y 6 cerillas respectivamente. Entonces $n_1 = 9 = 2^3 + 2^0, n_2 = 5 = 2^2 + 2^0, n_3 = 6 = 2^2 + 2^1$. Luego $a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 0$.

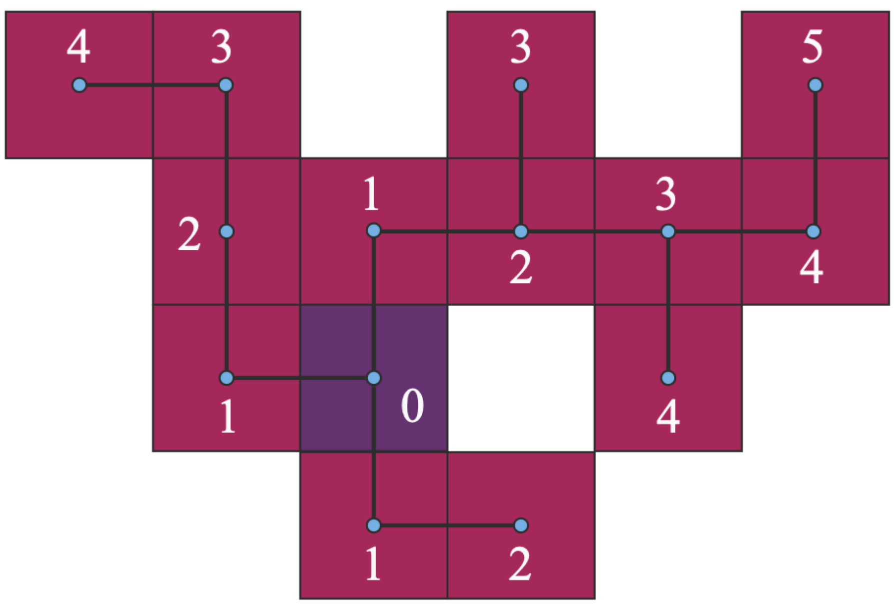
Afirmamos que la estrategia ganadora para un jugador es hacer un movimiento de manera que todos los a_i iguales a 0. En particular, afirmamos que

1. Si todos loa $a_i = 0$, $i = 0, ..., N$, entonces cualquier movimiento hará al menos un a_i ser distinto de cero.
2. Si algunos a_i son distintos de cero, entonces existe una manera de quitar algunas cerillas en una fila para hacer que todos los a_i valgan 0.

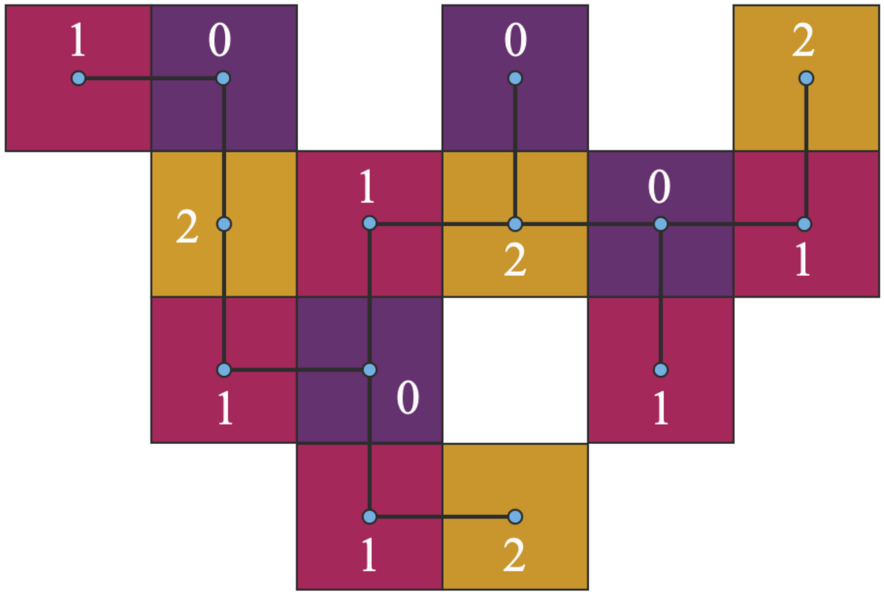
Demuestre las afirmaciones 1 y 2. Esto implica que el jugador que consigue equilibrar el tablero (todos los a_i iguales a 0) puede reducir el tablero hasta la posición (0,0,...., 0), que es la ganadora.

Apéndice 2. Un algoritmo para colocar las reinas en un poliominó:

Tomemos un poliminó y marquemos el centro de cada cuadro. Podemos suponer que los cuadros tienen lados de longitud igual a 1. Decidimos marcar un cuadro central y medimos la distancia mínima desde su centro al centro de los otros cuadros cuando nos movemos horizontal o verticalmente de centro a centro.



Luego calculamos el resto de la división de esta distancia entre 3. Este resto puede ser 0, 1 o 2. Coloreamos todos los cuadros con el mismo resto con el mismo color, y los cuadros con restos diferentes se colorean con colores diferentes.



1. Explique por qué colocar reinas en todos los cuadros de un color determinado permite amenazar todos los cuadros del poliminó.
2. Obtenemos entonces una solución mínima tomando los cuadros del color que aparezca con menos frecuencia. Identifique las dos soluciones en el ejemplo. Explique por qué este color aparece como máximo m veces,, donde m es la parte entera de $\frac{n}{3}$.
3. Pruebe el algoritmo en otros poliminós.
4. Dibuje poliminós para los que podamos usar menos reinas que el número dado por el algoritmo.

Las matemáticas de los eclipses

Entre el 13 y 14 de marzo de 2025 se producirá un eclipse lunar, coincidiendo con el Día Internacional de las Matemáticas 2025. Este será un eclipse lunar total visible en gran parte de las Américas. Seis meses después, entre ell 7 y 8 de septiembre de 2025, se producirá un eclipse lunar similar, visible totalmente en la mayor parte de Asia, el este de África y Australia. Esta puede ser una buena oportunidad para hablar sobre las matemáticas de los eclipses.

Participantes:

A partir de 13 años.
No se necesitan conocimientos matemáticos previos, pero los participantes deben tener una comprensión básica de los movimientos de la Tierra y la Luna.

Actividad:

Realización de un modelo físico del Sol, la Tierra y la Luna.
Comprender las matemáticas detrás del fenómeno de los eclipses.

Materiales:

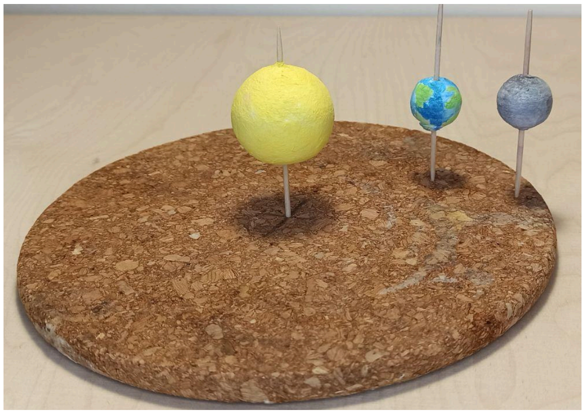
- Tres bolas de algodón comprimido, poliestireno, madera, u otro material. Las bolas deben tener un orificio pasante. Lo ideal es tener dos o tres tamaños, aunque no es indispensable.
- Palillos de dientes que se puedan clavar a través de las bolas.
- Acuarela u otro tipo de pintura que sea adecuada para colorear las bolas.
- Superficie de corcho o cartón para fijar los palillos.

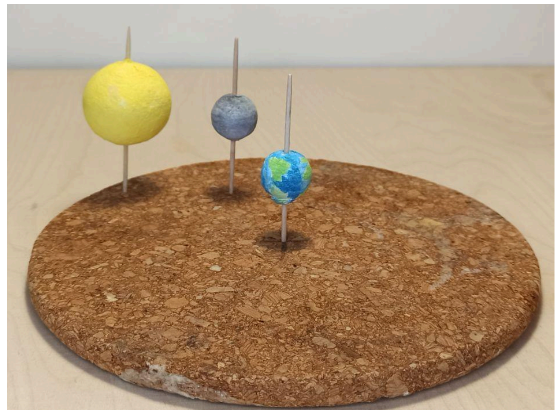
Preparación:

- Pinta una bola grande de amarillo (el Sol), una bola mediana de verde y azul (Tierra) y una bola pequeña de gris (Luna).

1. Modelo plano

Tarea: Fija las tres bolas en cartón tal y como el Sol, la Tierra y la Luna se encuentran en el espacio, y describe cómo se mueven.



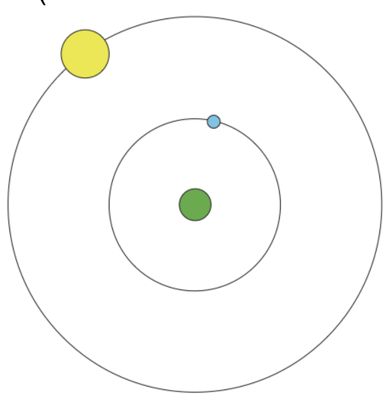


Los dos principales movimientos relativos del Sol, la Tierra y la Luna son:

- La Tierra gira alrededor del Sol.
- La Luna gira alrededor de la Tierra.

Puedes poner el Sol en el centro, la Tierra a cierta distancia y la Luna cerca de la Tierra. Los tamaños y distancias ciertamente no serán a escala, pero sólo se necesitan estimaciones aproximadas.

Otra opción es poner la Tierra en el centro y el Sol y la Luna moviéndose alrededor. Este también es un modelo válido. Esto ilustra una idea muy importante: el “centro” es sólo una cuestión de qué referencia se tome (no existe un centro absoluto del universo).



El primer caso es un modelo Heliocéntrico (Helios = Sol), y el segundo es un modelo Geocéntrico (Geo = Tierra). Ambos puntos de vista son equivalentes, pero a veces un punto de vista es mejor para comprender el fenómeno o para realizar cálculos. En matemáticas se utilizan cambios de punto de vista para estos fines.

No todas las configuraciones son válidas, por ejemplo poner el Sol entre la Tierra y la Luna es incorrecto.

Suponiendo que el Polo Norte de la Tierra esté hacia arriba, la Tierra debería moverse en sentido antihorario alrededor del Sol (o el Sol alrededor de la Tierra). La Luna también debería moverse en sentido antihorario alrededor de la Tierra. La Tierra también gira sobre su eje en sentido antihorario. Observa que que estamos colocando todos los cuerpos en el mismo plano, aunque como veremos, no es así como se encuentran en realidad.

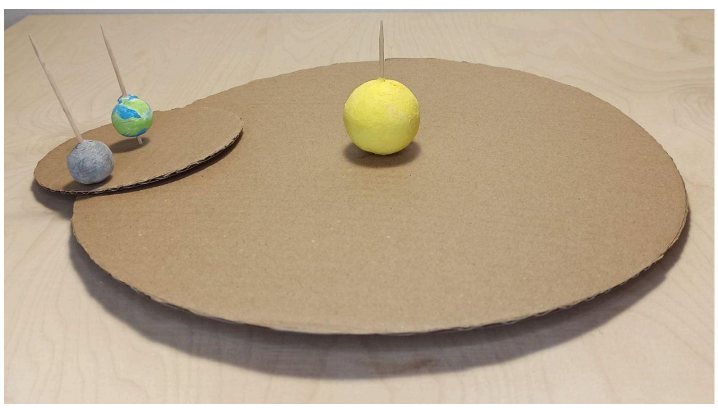
2. Fases lunares y eclipses.

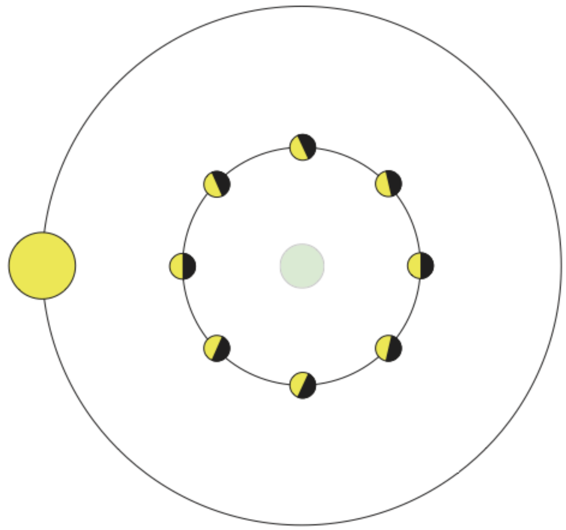
Tarea: Escribe una definición de los siguientes eventos astronómicos, junto con la construcción de un modelo con las bolas en el corcho:

a. Luna nueva
b. Cuarto creciente
c. Luna llena
d. Cuarto menguante
e. Eclipse solar (total o parcial)
f. Eclipse lunar (total o parcial)

Conversar: Una respuesta básica sería:

- El Sol sólo puede iluminar la mitad de la Luna. Las fases de la Luna suceden porque sólo una parte de la mitad iluminada del Luna está de cara a la Tierra.
- Los eclipses ocurren cuando los tres cuerpos celestes están de alguna manera alineados y uno oculta a otro.

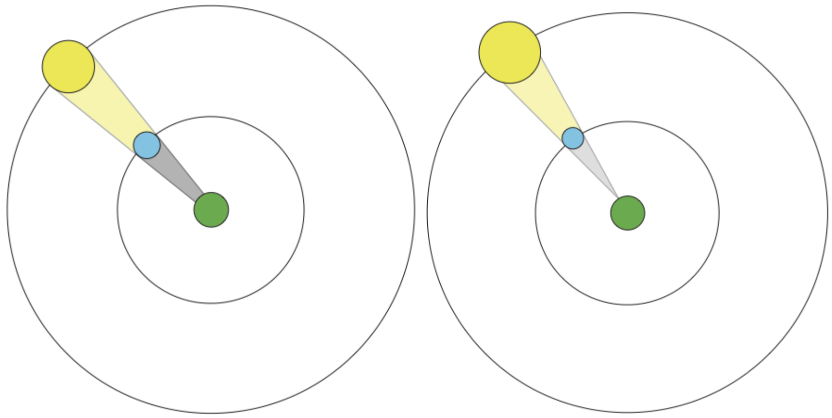




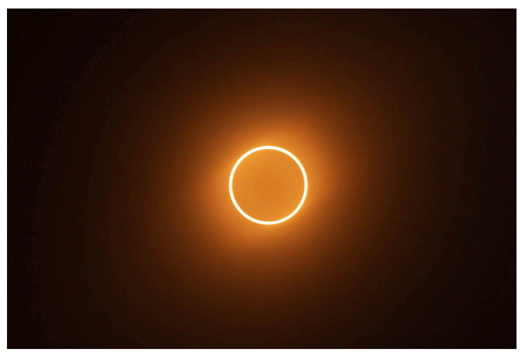
Fases de la luna

Las respuestas que buscamos son:

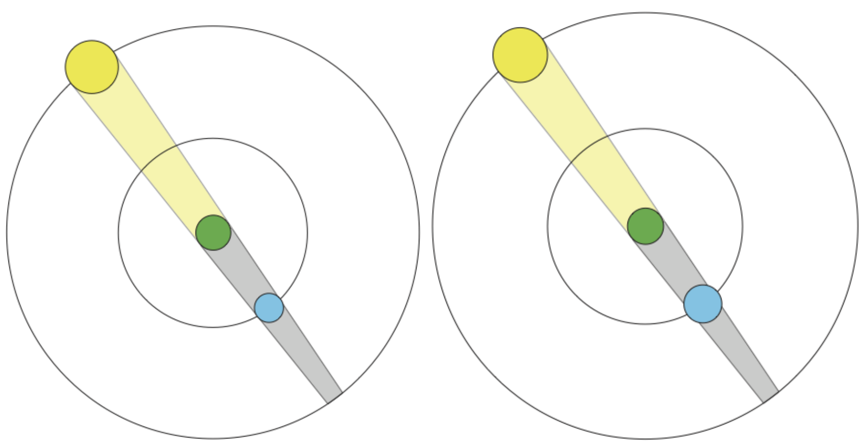
a. *Luna nueva.* La Luna está entre la Tierra y el Sol (pero no alineada). El lado de la Luna que es iluminado está de espaldas a nosotros, y nosotros estamos mirando hacia el lado que no está iluminado por el Sol (está en la sombra). En las partes de la Tierra donde es de día, la Luna está en el cielo pero no es visible (ya que no esta iluminada). En las partes de la Tierra donde es de noche, la Luna no está en el cielo (está escondida detrás del horizonte).
b. *Cuarto creciente.* El Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo aproximadamente rectángulo con el ángulo recto en la Tierra. La Luna es visible antes y después del atardecer.
c. *Luna llena.* La Tierra está entre el Sol y la Luna (pero no alineada). Podremos ver casi el hemisferio de Luna llena iluminado por el Sol durante la mayor parte de la noche.
d. *Cuarto menguante.* El Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo aproximadamente rectángulo con el ángulo recto en la Tierra. La Luna es visible antes y después del amanecer.
e. *Eclipse solar* (total, anular, o parcial). La Tierra está en la sombra proyectada por la Luna, por lo que el Sol desaparece momentáneamente detrás de la Luna.
f. *Eclipse lunar* (total o parcial). La Luna está en la sombra proyectada por la Tierra, por lo que queda momentáneamente oscurecida.



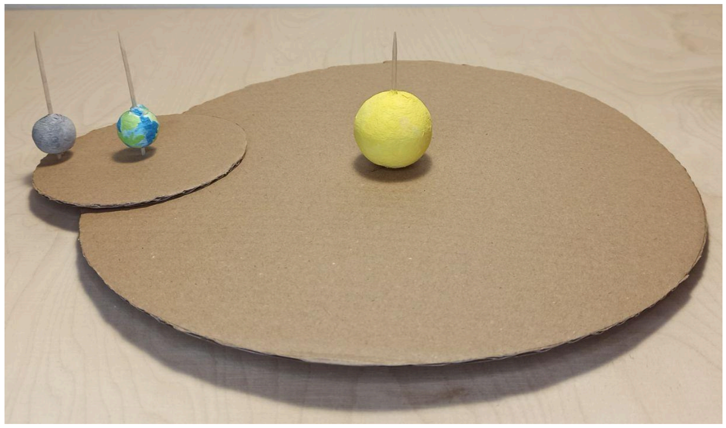
Un eclipse solar total y un eclipse solar anular.



Fotografía de un eclipse solar anular
Fuente: Dpickd1 vía Wikimedia Commons, CC-BY 4.0,



Eclipse lunar total (sucede) y eclipse lunar anular (nunca puede suceder)



3. Periodos de rotación

¿Cuánto tiempo le toma a cada cuerpo completar una vuelta?

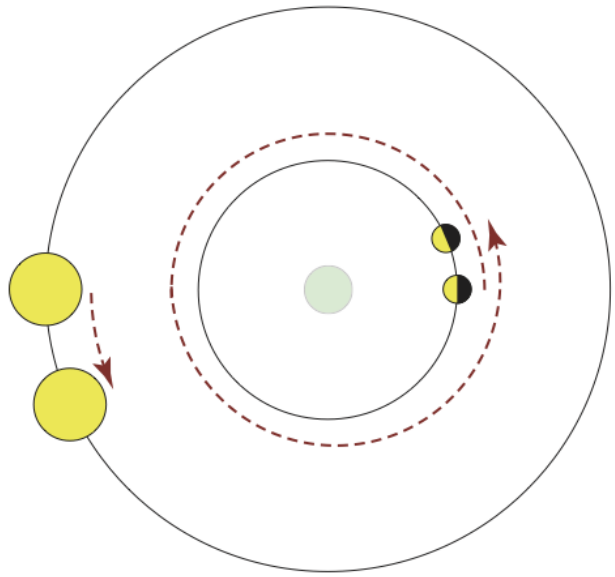
Una primera respuesta, por nuestra experiencia cotidiana, sería:

- El período de rotación de la Tierra alrededor de su eje es de un día;
- El período de rotación de la Tierra alrededor del Sol es de un año (unos 365,25 días)
- El período de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es cercano a un mes (ese es también el tiempo que tarda la Luna en pasar por todas sus fases)

Intentemos ser más precisos con la Luna. Fijaremos el origen en la Tierra (modelo geocéntrico) porque así todos los movimientos son circulares (en el modelo heliocéntrico, la Luna describe una trayectoria mucho más complicada).

Ejercicio: Supongamos que la Luna da la vuelta a la Tierra en 27,32 días (respecto a las estrellas, que están fijas), y que el Sol da una vuelta a la Tierra en 365,25 días (también respecto a las estrellas fijas), y que giran en el mismo sentido. Supongamos además que en algún momento los tres cuerpos están alineados. Calcula cuándo volverán a estar alineados.

Solución:
En t días la Luna avanza un ángulo de $360\ t/27{,}32^\circ$ y el Sol avanza un ángulo de $360\ t/365{,}25^\circ$. Supongamos que empezamos con los tres cuerpos alineados. La siguiente vez que vuelven a estar alineados en el mismo orden ocurre cuando el Sol ha recorrido una fracción de vuelta y la Luna (que va más rápido) ha recorrido una vuelta completa más la misma fracción de vuelta.



Calcular el periodo entre alineaciones

Esto significa que en el momento de estar de nuevo alineados, *t* satisface la ecuación

$$360\,\frac{t}{27.32} \;=\; 360 \;+\; 360\,\frac{t}{365.25}$$

cuya solución es *t* = 29,53 días. Esa es nuestra respuesta.

Observemos que para definir qué es "un giro", necesitamos fijar un marco de referencia. Así tenemos diferentes definiciones:

- Uno *mes sidéreo* equivale a 27,32 días, y es el período que tarda la Luna desde que está en dirección a cualquier estrella de referencia hasta que vuelve a estar en la misma dirección. (También es el período de la Luna entre dos pasajes en el plano vertical que contiene el eje inclinado de la Tierra, en el mismo lado de la Tierra).
- Uno *mes sinódico* equivale a 29,53 días, y es el periodo que tarda la Luna desde que está en dirección al Sol hasta que vuelve a estar en la misma dirección.

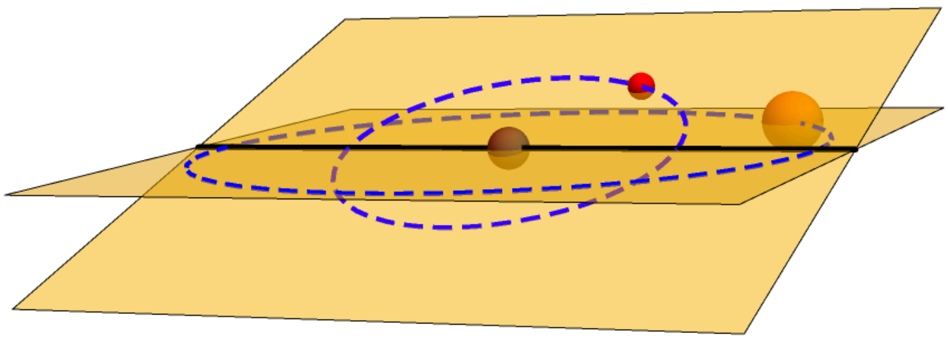
Un mes sinódico es el período entre dos lunas llenas. Durante este período la luna pasa por todas sus fases.

En realidad, esto también sucede con la rotación de la Tierra sobre sí misma.

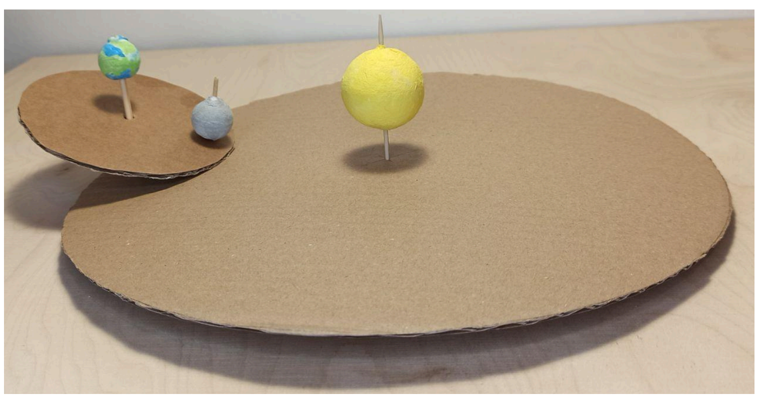
- Un *día sidéreo* equivale a 0,9972 días (23 h 56 min 4,0905 s), y es el período en el que los cielos parecen dar una vuelta alrededor de la Tierra (la Tierra está en la misma orientación respecto a las estrellas).
- Uno *día (solar)* es el período en el que el Sol parece dar una vuelta alrededor de la Tierra (la Tierra está en la misma orientación con respecto al Sol). Es también el periodo entre dos momentos en que el sol se encuentra en su cenit (punto más alto), el mediodía solar.

4. Inclinación del plano de la órbita lunar

Con el modelo que hemos construido, parece que cada mes tendríamos un eclipse solar y un eclipse lunar. ¿Por qué no tenemos eclipses todos los meses?
El plano orbital de la Luna alrededor de la Tierra no es el mismo que el plano orbital de la Tierra alrededor del Sol (llamado plano de la Eclíptica).
En realidad, los dos planos forman un ángulo de unos 5º. Puedes exagerar el ángulo en el modelo, ya que los tamaños y distancias relativos ya están fuera de escala.



Tarea: Construye y dibuja un modelo heliocéntrico teniendo en cuenta la inclinación del plano orbital lunar y revisa las definiciones que diste en el paso 3 con este nuevo modelo.



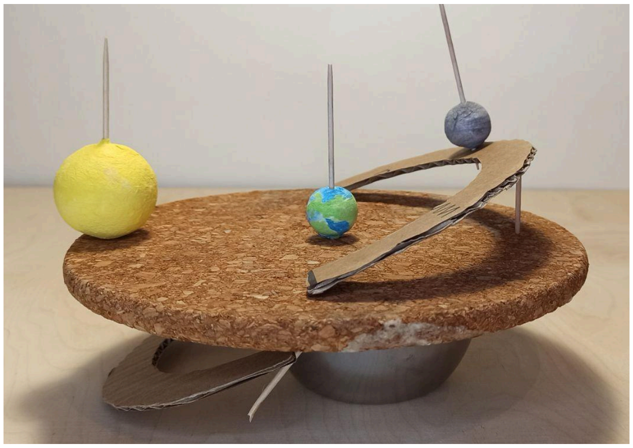
También puedes ver la aplicación interactiva [Fases lunares y eclipses].

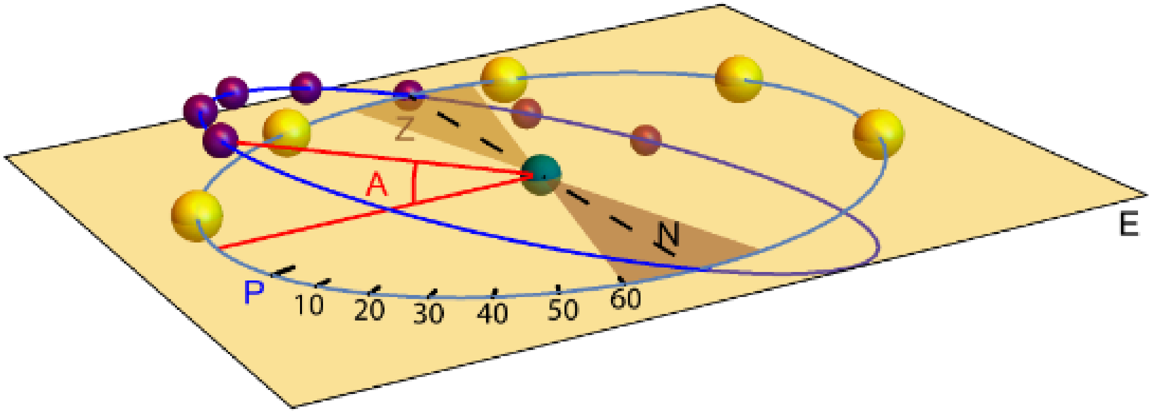
El plano orbital unar y el de la eclíptica se cruzan en una línea, llamada *línea nodal*. El Sol, la Tierra y la Luna sólo pueden alinearse sobre esta línea. El sol está en la línea nodal aproximadamente dos veces al año (dando lugar a dos estaciones de eclipses en un año). Sin embargo, los eclipses son raros porque no siempre el Sol se encuentra sobre la línea nodal a la vez que la Luna también cruza esa línea.

Nota: Una sutileza que no está en nuestro modelo: La línea nodal gira lentamente (precesión nodal), por lo que las estaciones de los eclipses no están sincronizadas con las estaciones del año.

Tarea. Construye y dibuja un modelo geocéntrico considerando la inclinación del plano orbital lunar.

Este modelo es equivalente al modelo heliocéntrico (centrado en el Sol), pero proporcionará más información y cálculos más sencillos. Pon la Tierra en el centro del plato de corcho. El Sol, la Luna y todas las estrellas se encuentran (aparentemente) en una esfera centrada en la Tierra, la *cúpula del cielo*.





Modelo geocéntrico: El Sol (amarillo) se mueve en el plano de la eclíptica (E), y la Luna (violeta) en su plano orbital, inclinado un ángulo de 5.14º (A). La Línea nodal (N) es la intersección de ambos planos. Para que ocurra un eclipse, tanto el Sol como la Luna deben encontrarse dentro de un entorno de 18.5º de la línea nodal (zona marrón Z). El Primer Punto de Aries (P) marca el orígen de la longitud eclíptica.

La trayectoria aparente del Sol es la eclíptica. Es conveniente hacer que el plano de la eclíptica sea horizontal en nuestro modelo. Podemos fijar el origen de la eclíptica en la posición del Sol el primer día de primavera (en el hemisferio norte) en marzo; este punto se llama *Primer Punto de Aries*. La *longitud eclíptica* es el ángulo medido desde el primer punto de Aries a lo largo de la eclíptica. El Sol aumenta su longitud eclíptica aproximadamente 1 grado por día, tardando 365,25 días en completar su rotación de 360 grados alrededor de la tierra.

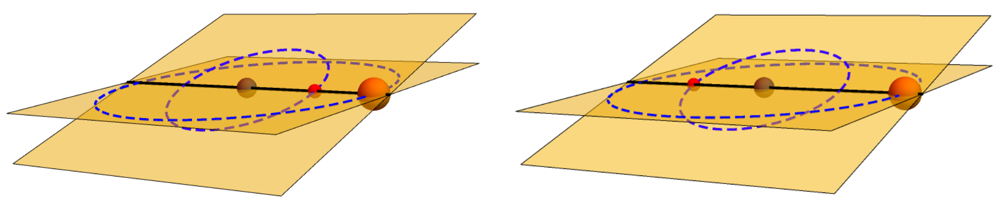
La luna gira alrededor la Tierra en un plano inclinado 5,14º con respecto a la eclíptica, y tarda un mes sidéreo (27,32 díass) en dar una vuelta. El plano de la órbita lunar cruza la eclíptica en la línea nodal.

Ejercicio: Identificar nuevamente las fases de la Luna y los eclipses.

Observa que debido a que el ángulo entre los dos planos es tan pequeño, tiene sentido proyectar la Luna en el plano de la eclíptica y medir cómo se mueve, a través de su longitud eclíptica.

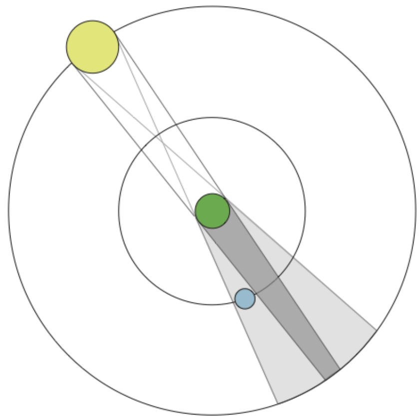
Cuando el Sol y la Luna tienen la misma longitud eclíptica, se produce la Luna nueva. Después de un mes sinódico (29,53 días), el Sol y la Luna vuelven a tener la misma longitud eclíptica y es Luna nueva otra vez. Cuando la diferencia entre sus longitudes eclípticas es 180º, se produce la Luna llena, y cuando la diferencia es de 90º, la luna se halla en cuarto creciente o menguante.

Un eclipse solar es una Luna nueva que ocurre en la línea nodal, y un eclipse lunar es una luna llena que ocurre en la línea nodal. Dado que el Sol y la Luna tienen cierta anchura, existen algunos márgenes alrededor de la línea nodal (unos 18,5º) donde puede ocurrir un eclipse.



Eclipses solares y lunares

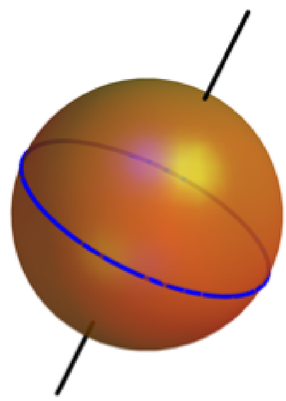
Cuando la luz del Sol llega a la Tierra, se crea una zona de umbra (sombra) donde no penetra la luz del Sol, y una región de penumbra donde penetra parte de la luz del Sol. Podría ocurrir que la Luna atraviese la penumbra sin atravesar la umbra. En tal caso hablamos de eclipse lunar penumbral. Un eclipse así puede ser total o parcial.



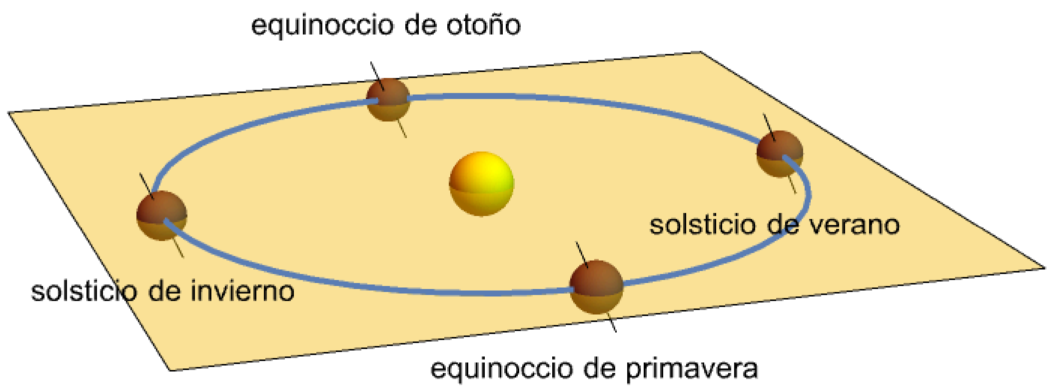
Eclipse lunar total penumbral

5. Actividad extra: Las estaciones.

Introduzcamos la inclinación del eje de rotación de la Tierra en nuestro modelo.



El eje de la Tierra forma un ángulo fijo con el plano de la Eclíptica. Este ángulo es responsable del mecanismo de las estaciones.



Pregunta: ¿Dónde se encuentra el Sol cuando entran la primavera, el verano, el otoño y el invierno? (ten en cuenta que la respuesta depende en qué hemisferio te encuentres). Explica por qué las estaciones (fría y cálida) están provocadas por la inclinación del eje de la Tierra (23,44º). Deduce en qué dirección está inclinado ese eje..

Respuesta:
El primer punto de Aries es el punto de la eclíptica donde está el sol el primer día de primavera en el hemisferio norte. Es el origen de la longitud de la eclíptica. Así, la entrada de la primavera está por definición ubicada en la longitud eclíptica de 0º. El verano, otoño e invierno (en el hemisferio norte) se sitúan en 90, 180º y 270º respectivamente. En el hemisferio sur, el primer punto de Aries corresponde al primer día de otoño, y los siguientes puntos corresponden a invierno, primavera y verano, respectivamente.

Si el Polo Norte está hacia arriba en tu modelo, el eje de la Tierra debe estar inclinado 23,44º hacia el Sol el primer día de verano. Si prefieres el Polo Sur hacia arriba, este debe estar inclinado en dirección opuesta al Sol en ese mismo momento.

Compara los diferentes ángulos con los que los rayos del Sol llegan a la Tierra en verano e invierno en un lugar particular en la Tierra (por ejemplo donde tú te encuentras), y los largos días y noches en los polos.

Nota: El Primer Punto de Aries está, por definición, en la intersección del plano de la eclíptica y el plano del ecuador de la Tierra. Esta línea no es fija con respecto a las estrellas, porque la inclinación del eje de la Tierra cambia (la *precesión de los equinoccios*), pero su movimiento es extremadamente lento, alrededor de una vuelta cada 26.000 años. Sin embargo, ha pasado suficiente tiempo desde que los Antiguos nombraron ese punto como la punta de la constelación de Aries, y hoy ese punto está en realidad en la constelación de Piscis.

Esta precesión, entre otras cosas, significa que el período de la órbita de la Tierra con respecto a las estrellas (*año sidéreo*, 365.256363004 días) es unos 20 minutos más largo que el de la misma órbita con respecto al Sol (año *tropical*, 365.24219 días). El año tropical es el año habitual, la base del calendario.

6. Material extra: Otros meses lunares y frecuencia de eclipses.

Existen diferentes nociones de mes lunar:

- Mes sidéreo (de las estrellas): Es el período que toma la Luna para realizar un giro respecto a las estrellas fijas. Tiene una duración de 27,321661 días.
- Mes sinódico (del griego sínodo, reunión). Es el período de la Luna para volver a alcanzar la misma longitud eclíptica que el Sol. Es el período de las fases lunares. Tiene una duración de 29,53059 días.

- Mes dracónico (del dragón mítico que se dice que vive en los dos nodos y se come el Sol o la Luna durante los eclipses): Es el período para que la Luna vuelva a pasar de un nodo al mismo nodo. Es ligeramente diferente del mes sidéreo, 27.212220 días.
- Mes anomalístico: la Luna se mueve en una elipse, no en un círculo. Esto hace que la Luna parezca un poco más grande cuando está más cerca de la Tierra y un poco más pequeña cuando está más lejos. Esta es la razón por la que a veces un eclipse solar es total (la Luna cubre completamente al Sol) y otras veces es anular (la Luna cubre un círculo casi concéntrico con el Sol, dejando un anillo de luz visible o el Sol). El eje de esa elipse está girando. El periodo que tarda la Luna en pasar de su perigeo (punto más cercano de la órbita) a él nuevamente es un mes anómalo, que dura 27,554551 días

Los antiguos babilonios y griegos tenían un modelo de cielo bastante desarrollado. Definieron el llamado ciclo de Saros, basándose en una coincidencia observacional:
Un ciclo de Saros es

- 223 meses sinódicos (exactamente, por definición)
- 242 meses dracónicos (casi exactamente)
- 239 meses anómalos (casi exactamente)
- 6.585,321347 días
- 18.029 años (18 años, 11 días y 8 horas)

Si ocurre un eclipse, entonces después de un ciclo de Saros, la Luna vuelve a estar en la misma fase (un número entero de meses sinódicos), cruzando la eclíptica nuevamente (un número entero de meses dracónicos) y con el mismo tamaño aparente (un número entero número de meses anómalos), por lo que se produce un eclipse casi idéntico. Los griegos habían anotado tablas con todos los eclipses en un ciclo de Saros (registrados en unos 18 años), a partir de las cuales podían extrapolar todos los eclipses y (su tipo) durante siglos.

Dado que un Saros supera en un tercio un número entero de días, (unas 8 horas), después de un Saros la Tierra ha girado un tercio de vuelta, por lo que desde la misma posición de la Tierra, el eclipse se verá con 8 horas de diferencia (por lo tanto, en una región de la Tierra desplazada por 120º de longitud). Cada tres Saros (54 años y 34 días), se puede ver un eclipse casi idéntico desde el mismo lugar, a la misma hora.

El Saros y los números enteros de días y meses se ajustan al ideal griego de que “los números gobiernan todo” y que los números son sólo números naturales o fracciones, siendo estas últimas relaciones entre números naturales. Aunque los griegos descubrieron los números irracionales, eso planteó una profunda crisis en su filosofía, y era mucho más agradable pensar en los cielos gobernados por estos números especiales.

7. Conclusiones

En esta actividad hemos construido varios modelos. Un modelo, en el sentido matemático, es una representación simplificada de la realidad que nos permite explorar y comprender un sistema.

El primer modelo que hicimos tenía los tres cuerpos moviéndose en el mismo plano. Refinamos ese modelo haciendo que la Luna orbite en un plano diferente al del Sol. En la última parte, incluimos la inclinación axial de la Tierra y mencionamos varias mejoras que podemos considerar para hacer que el modelo sea más preciso.

Un modelo se basa en observaciones de la naturaleza y propone un mecanismo "como si" la naturaleza lo siguiera. En la sección 3, calculamos el mes sinódico a partir del mes sidéreo. Sin embargo, ambos podemos medirlos directamente desde la naturaleza: observando la posición de la Luna con respecto a las estrellas, medimos el mes sidéreo. Observando las fases de la Luna (es decir, su posición con respecto al Sol), medimos el mes sinódico. ¿Estas observaciones coinciden con el valor calculado? ¡Sí! Esto valida el modelo ya que la Luna se comporta *como si* girase alrededor de la Tierra en un círculo, a una determinada velocidad constante. Excepto que... en realidad, ¡las observaciones **no** coinciden con los cálculos si medimos con suficiente precisión! Esto revela que el modelo está incompleto. Luego tenemos que refinar y decir que en realidad la órbita no es exactamente un círculo sino una elipse, y la velocidad alrededor no es exactamente constante sino que es más rápida en la parte de la elipse que está más cerca de la Tierra. Las leyes de Newton proporcionan un modelo más refinado de los cielos, que describe las órbitas y las fuerzas entre los cuerpos celestes. Sin embargo, las leyes de Newton no pueden explicar todos los fenómenos astronómicos y, en algún momento, tendremos que utilizar la teoría de la relatividad de Einstein. Y así sucesivamente. Todavía hay fenómenos que esperan ser explicados por un buen modelo. Esto no significa que los modelos más simples sean incorrectos o inútiles. Todavía proporcionan una buena visión general, conocimientos y aproximaciones a la realidad. Los modelos más refinados son más precisos y brindan información más profunda.

Recursos

- Aplicación de fases lunares y eclipses: https://imaginary.github.io/moonphaseseclipses

¡Crea y comparte!
Comparte los hallazgos de los participantes usando los hashtags **#idm314eclipses** y **#idm314**.

Poliedros artísticos

Participantes:

A partir de 14 años, dependiendo de la actividad.
No se necesitan conocimientos previos de matemáticas, pero a medida que avancemos en las actividades, aparecerán conceptos matemáticos como polígonos, polígonos regulares y poliedros, así como la suma de los ángulos de un triángulo, el número áureo, construcciones geométricas básicas o coordenadas cartesianas.

Materiales:

Para los modelos físicos utilizaremos palillos largos tipo brochetas de madera y gomas elásticas. Opcionalmente, los palillos se pueden pintar de colores. En algunas construcciones, puede resultar útil hacer poliedros con hilos o cuerda fina. También puedes construir poliedros con cartulina de colores.

Puede ser útil usa un proyector para mostrar algunas imágenes en el aula. Algunas actividades incluyen enlaces a animaciones y aplicaciones interactivas en línea.

1. Poliedros regulares.

Preguntas preliminares:

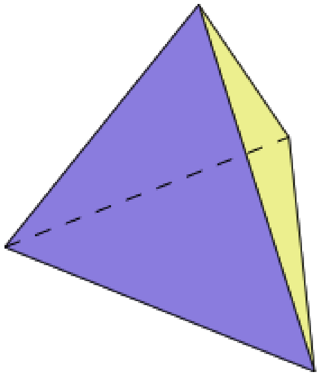
¿Qué es un *poliedro*?

- Es un sólido tridimensional limitado por caras planas. Las *caras* son polígonos planos.
- Los segmentos de recta donde se encuentran dos caras se llaman *aristas*.
- Los puntos donde se encuentran tres o más caras se llaman *vértices*.

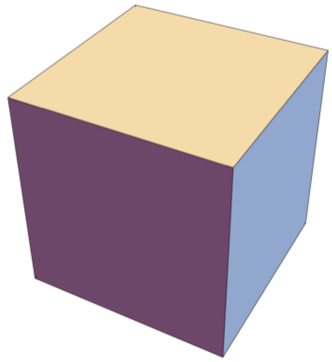
¿Qué es un poliedro regular?

- Las caras son polígonos regulares idénticos. (Un polígono es regular si todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos son iguales).
- Y cada vértice es adyacente al mismo número de caras.
- Y el poliedro es *convexo*.

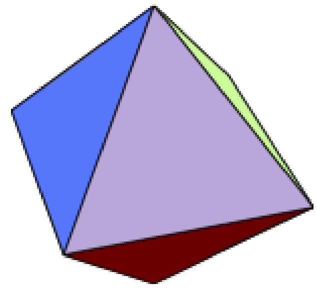
Los cinco poliedros regulares:



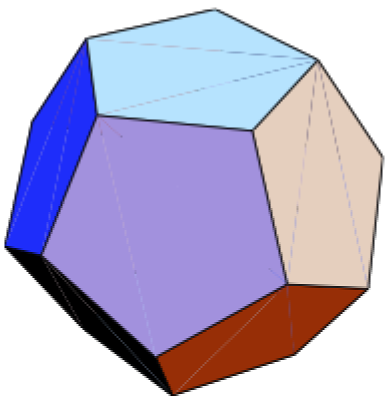
Tetraedro



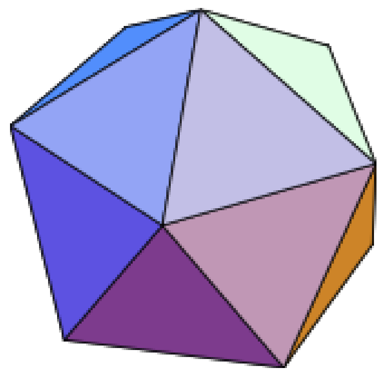
Hexaedro (Cubo)



Octaedro



Dodecaedro

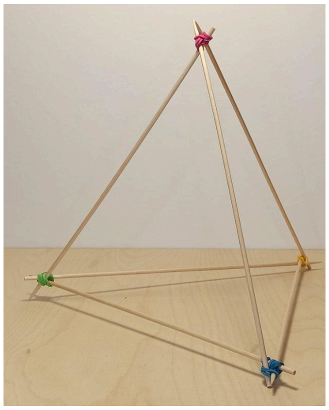
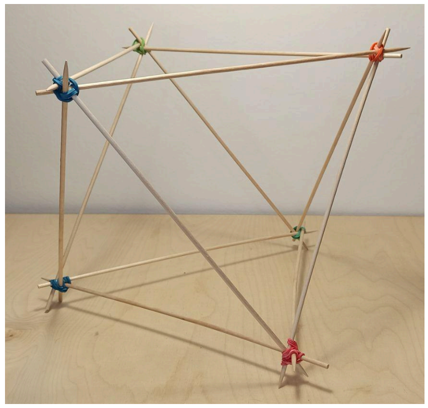
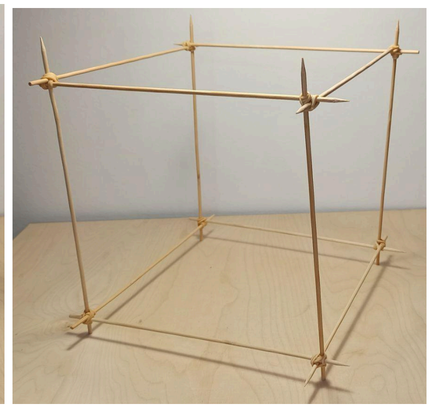
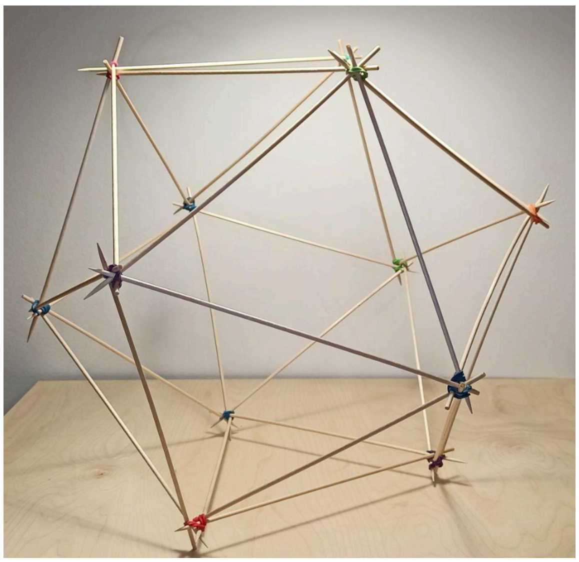
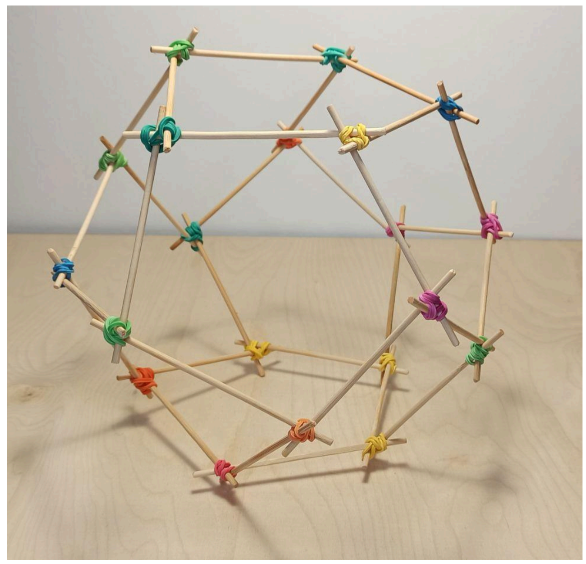


Icosaedro

Estos son los únicos cinco poliedros regulares, también conocidos como *sólidos platónicos* (haz clic en los enlaces para manipular los poliedros).

A partir de las imágenes y del número y tipo de caras, deduce el número de aristas y vértices (cuántos palillos y gomas necesitarás) y construye los cinco poliedros regulares.

Poliedro regular	Tipo de cara	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas
Icosaedro	triángulo	20	12	30
Octaedro	triángulo	8	6	12
Tetraedro	triángulo	4	4	6
Cubo	cuadrado	6	8	12
Dodecaedro	pentágono	12	20	30

Observa la relación de Euler:

$$C + V = A + 2$$

donde C, V y A son el número de caras, vértices y aristas, respectivamente.
Además, observa que existe una estrecha relación entre:

- El octaedro y el cubo.
- El icosaedro y el dodecaedro.
- El tetraedro y él mismo.

(Compara el número de vértices, aristas y caras).

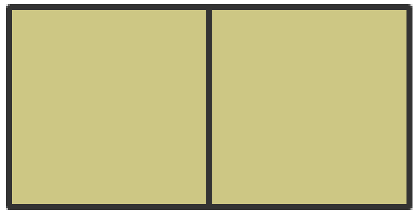
Estos pares de poliedros son llamados *duales*: Los vértices de uno corresponden a las caras del otro, y viceversa. Puedes obtenerlos colocando los vértices de uno en el centro de las caras del otro. Las aristas se corresponden una a una, pero están giradas 90º en el poliedro dual.

Sólo cinco poliedros regulares

Demostremos que sólo hay cinco poliedros regulares. Puedes utilizar papel o cartulina y cinta adhesiva para construir las figuras del argumento.

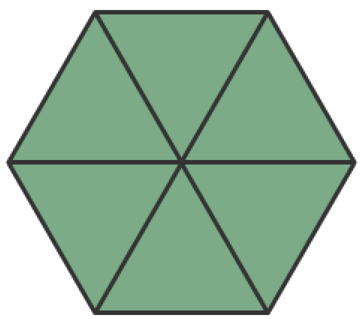
Sabemos que en un poliedro regular todas las caras son polígonos regulares iguales, y supongamos que *n* es el número de caras que coinciden en un vértice.

Paso 1: si $n = 2$, explica por qué no es posible construir ningún tipo de poliedro.



Paso 2: Ya sabemos que $n \geq 3$. Intentemos construir todos los poliedros regulares posibles, empezando por usar triángulos equiláteros.

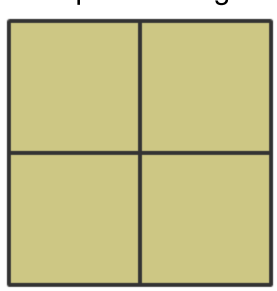
- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 4$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 4 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 5$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 5 triángulos en cada vértice.
- Si $n = 6$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?



- Si $n > 6$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 3. Pasemos a los cuadrados.

- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 cuadrados en cada vértice.
- Si $n = 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?



- Si $n > 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 4. Pasemos a los pentágonos regulares.

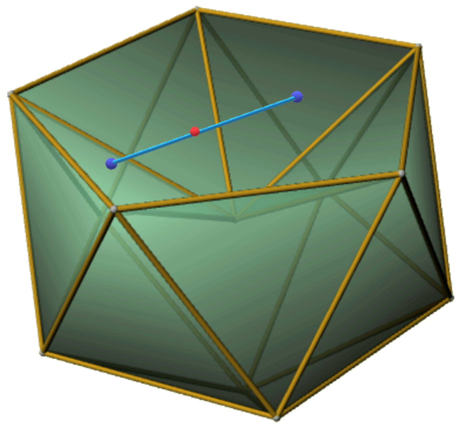
- Si $n = 3$, ¿es posible construir un poliedro regular? Si es posible, constrúyelo uniendo 3 pentágonos en cada vértice.
- Si $n \geq 4$, no es posible construir un poliedro regular. ¿Por qué no?

Paso 5. Finalmente, usemos hexágonos. Explica por qué no sería posible construir un poliedro regular usando hexágonos regulares.

Explica por qué no sería posible construir un poliedro regular usando heptágonos regulares (7 lados), octágonos regulares (8 lados), etc.

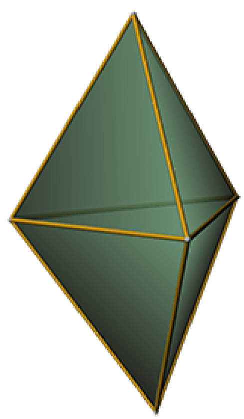
Poliedros no regulares

Un poliedro es convexo si, para cada par de puntos de las caras, el segmento que une los puntos está enteramente contenido en el poliedro.



Ejemplo de poliedro no convexo (haz clic aquí para manipular el poliedro)

En un poliedro regular todos los vértices son idénticos (tienen el mismo número de caras coincidentes).



Ejemplo de poliedro con todas sus caras polígonos regulares, pero no poliedro regular (en algunos vértices coinciden tres caras y en otros cuatro). (haga clic aquí para manipular el poliedro).

La definición de poliedros regulares prohíbe estos casos.

- Puedes jugar con esta aplicación [Mathina] para distinguir entre poliedros convexos y no convexos.
- Puedes truncar, estrellar y realizar otras modificaciones a los poliedros para obtener nuevos sólidos con esta aplicación [IMAGINARY GitHub].

La relación de Euler

Ya hemos observado una relación entre el número de caras, aristas y vértices en los sólidos platónicos. Esta relación se aplica a muchos más poliedros no regulares:

Relación de Euler. Para cualquier poliedro equivalente a la esfera, se cumple la siguiente relación

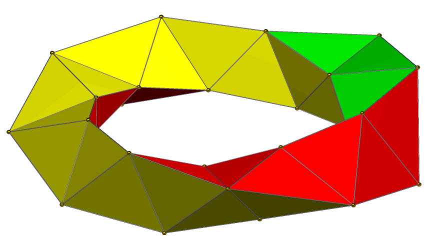
$$V - A + C = 2,$$

dónde V es el número de vértices, A es el número de aristas, y C es el número de caras.

De manera más general, la característica de Euler, denotada con la letra griega χ, se define como

$$\chi = V - A + C.$$

El teorema establece que χ = 2 para la mayoría de los poliedros que se te ocurran. Las excepciones, es decir, los poliedros que no son equivalentes a una esfera, incluyen, por ejemplo, un toro (forma de rosquilla) poliédrico o los poliedros de Kepler-Poinsot (cuando se piensa que tienen caras que se cruzan) porque rodean la esfera más de una vez. Todos los poliedros convexos tienen χ = 2.

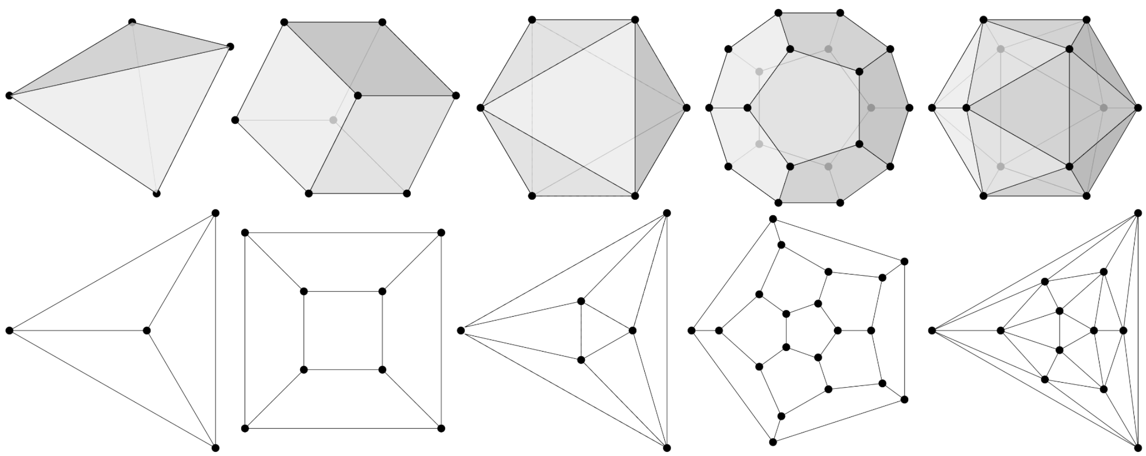


Un poliedro no regular y no convexo con forma de toro, con χ = 0.

Probemos la relación de Euler.

Paso 1. Dado que la relación no involucra ángulos, longitudes u otras propiedades métricas (que dependan de distancias), podemos deformar el esqueleto (es decir, las aristas y los vértices) como un grafo flexible y aplanarlo en un plano bidimensional. Demuestra que se puede dibujar el esqueleto de un poliedro convexo sobre un plano, sin que los bordes se crucen, lo que produce un grafo *planar*. Un grafo se llama *planar* cuando sus aristas no se cruzan (se tocan sólo en sus extremos, que son vértices).

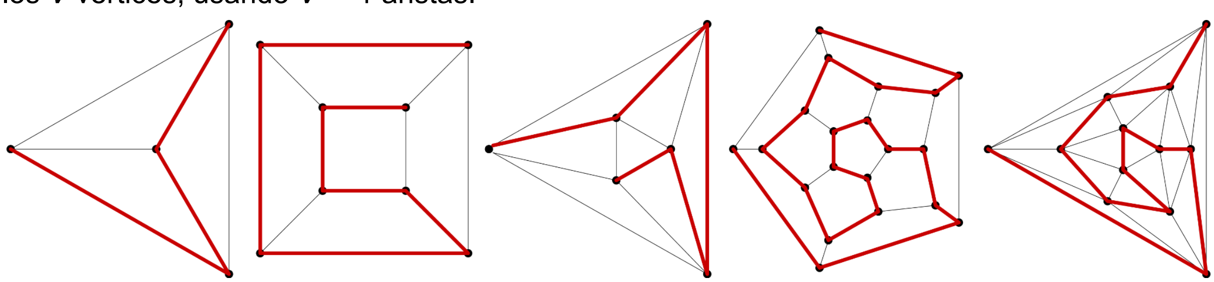
Por ejemplo, podemos hacerlo con los sólidos platónicos:



Observa que cada grafo tiene el mismo número de vértices, aristas y caras que el poliedro original. Las "caras" son las regiones cerradas, junto con la región exterior ilimitada.

Por tanto, podemos probar la relación de Euler para grafos planos.

Paso 2. Demuestra que en cada grafo planar podemos encontrar un camino que conecte todos los V vértices, usando $V - 1$ aristas.



Paso 3. Supongamos que eliminamos todas las aristas excepto las del camino que conecta todos los vértices. Demuestra que para este grafo tenemos $\chi = 2$.

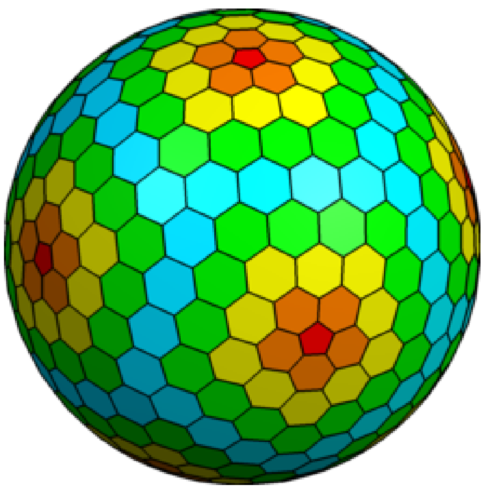
Paso 4. Volvemos a agregar las aristas que hemos eliminado en el paso anterior, una por una. Demuestra que al añadir cada arista, la característica de Euler permanece $\chi = 2$, hasta recuperar el grafo de nuestro poliedro original.

Retos adicionales

- Los poliedros con pentágonos y hexágonos se han utilizado para el diseño arquitectónico, por ejemplo, la *Biosfera de Montreal* diseñada por Buckminster Fuller en 1967. En la biosfera de Montreal, las caras son triángulos ensamblados con 5 o 6 aristas en cada vértice. Utilizando la fórmula de Euler, demuestra que (si la esfera estuviera completa) siempre hay exactamente doce vértices unidos a cinco triángulos.

La biosfera de Montreal
Imagen: Cédric THÉVENET, vía Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0

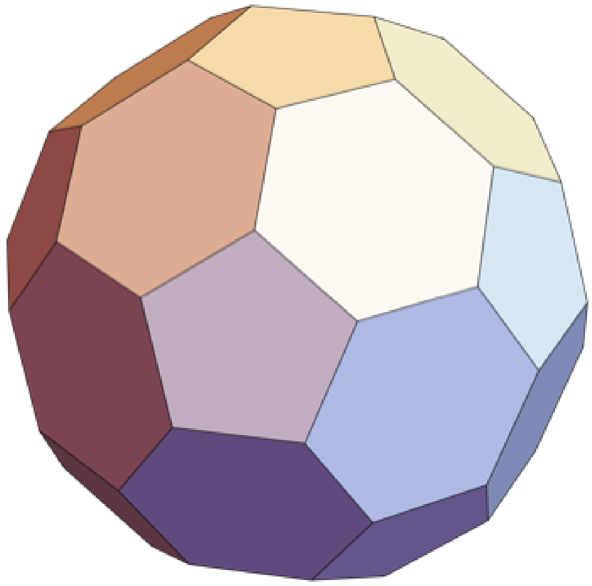
- *Poliedros de Goldberg*. Son poliedros cuyas caras son todas pentágonos y hexágonos y tienen las mismas simetrías que el icosaedro. Utilizando la fórmula de Euler, demuestra que cualquier poliedro cuyas caras sean pentágonos y hexágonos, tiene exactamente doce pentágonos. (Ten en cuenta que el icosaedro tiene exactamente 12 vértices y cinco triángulos están unidos a cada vértice).



Un poliedro de Goldberg

Imagen: Tomruen, vía Wikimedia Commons, CC BY-SA

Otro poliedro de Goldberg es el icosaedro truncado, el balón de fútbol que conocemos bien.



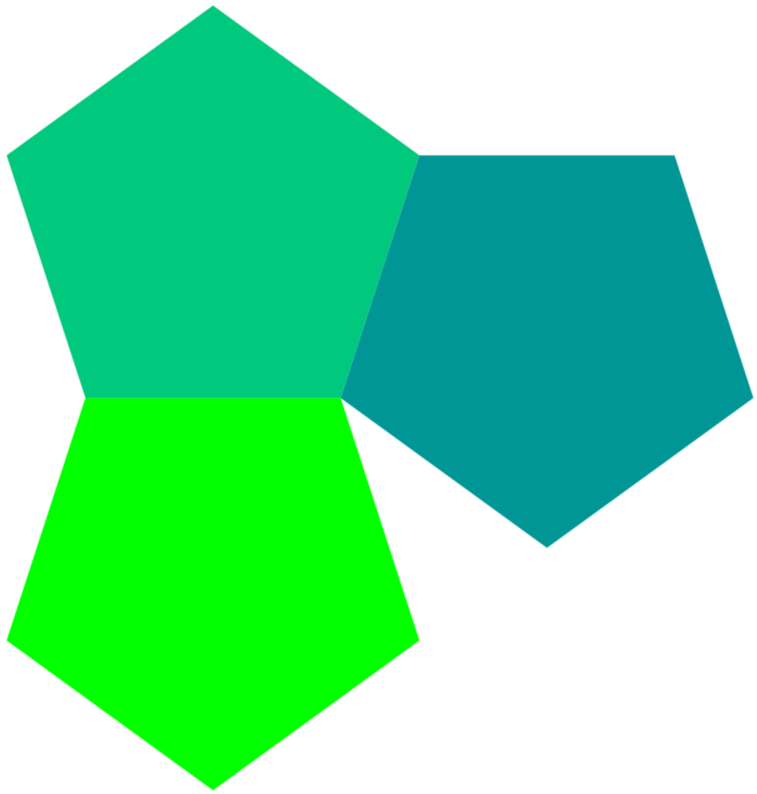
El icosaedro truncado

El Teorema de Descartes

Cuando construimos un poliedro, ensamblamos caras en cada vértice. Podemos contar la suma de los ángulos de las caras adyacentes a un vértice. Esta suma es

- Menor que 360º si el poliedro es convexo cerca de ese vértice;
- Igual a 360º si el poliedro es plano cerca de ese vértice;
- Mayor que 360º si el poliedro es cóncavo cerca de ese vértice.

La diferencia entre 360º y la suma de los ángulos en un vértice se llama *defecto en ese vértice.* (el defecto es negativo en el tercer caso).

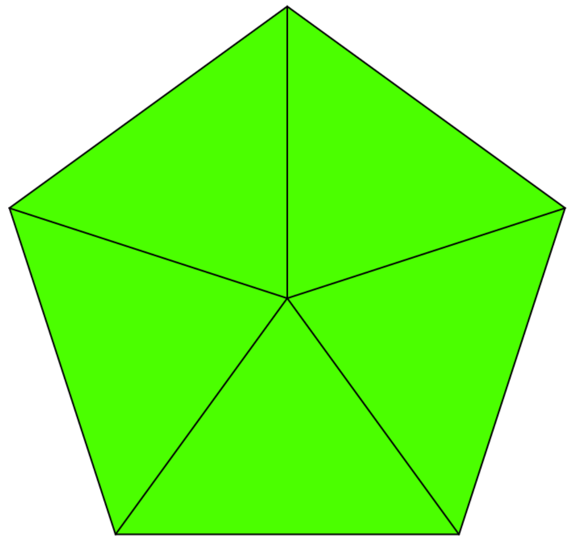


El defecto en un vértice de un dodecaedro es de 360º – 3 x 108º = 36º.

Teorema de Descartes: Para un poliedro, la suma de los defectos en cada vértice, también llamada *defecto total*, es igual a 720º.

a) Verifica el teorema de Descartes en los poliedros regulares u otros poliedros, como el icosaedro truncado.
b) Demuestra el teorema de Descartes utilizando la fórmula de Euler:

Paso 1: Primero, podemos reducir el problema al de un poliedro con caras triangulares. Para ello basta con coger un punto interior dentro de cada cara poligonal y unirlo a todos los vértices de la cara, dividiendo así la cara en triángulos.



Si una cara tiene *n* bordes, el proceso agrega un vértice (el punto interior), *n* aristas que unen el punto interior a los vértices, y una cara se reemplaza por *n* caras triangulares. De ahí la fórmula de Euler ($V + F = Y + 2$) sigue siendo válida

.

Paso 2: Demuestra el teorema de Descartes para un poliedro con caras triangulares. Sea *D* la suma de los defectos, *V* el número de vértices, *A* el número de aristas, y *C* el número de caras. Entonces:

$$A = 3/2\ C.$$

ya que cada cara tiene tres aristas y cada arista se cuenta dos veces.

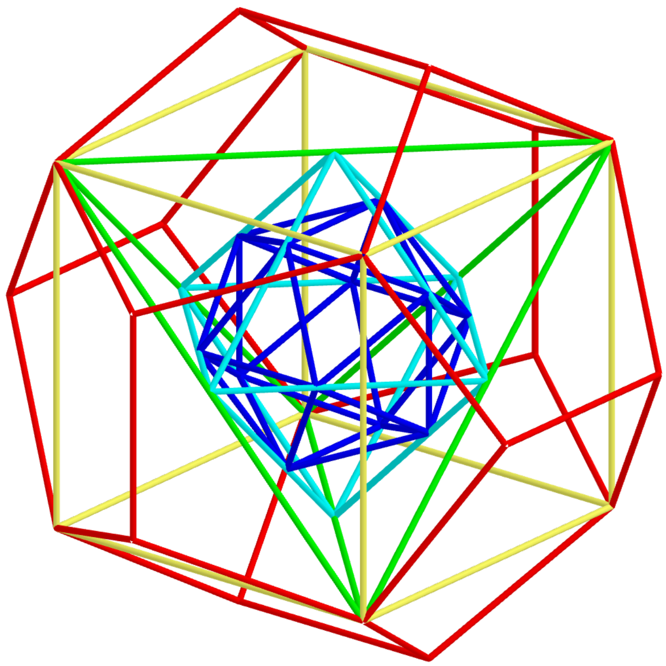
$$D = 360º\ V - 180º\ C.$$

Por lo tanto,

$$D = 180º(2V - C) = 180º(2V + 2C - 3C) = 360º(V + F - 3/2\ C)$$
$$= 360º(V + F - C) = 360º \times 2 = 720º.$$

Construir el omnipoliedro

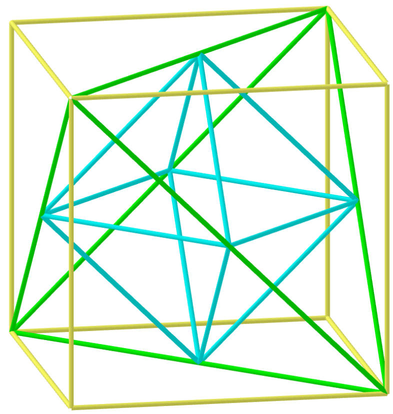
Una disposición de los cinco poliedros regulares inscritos entre sí que muestra algunas de sus relaciones y propiedades a veces se denomina *omnipoliedro* (no es un solo poliedro, sino una configuración de poliedros).

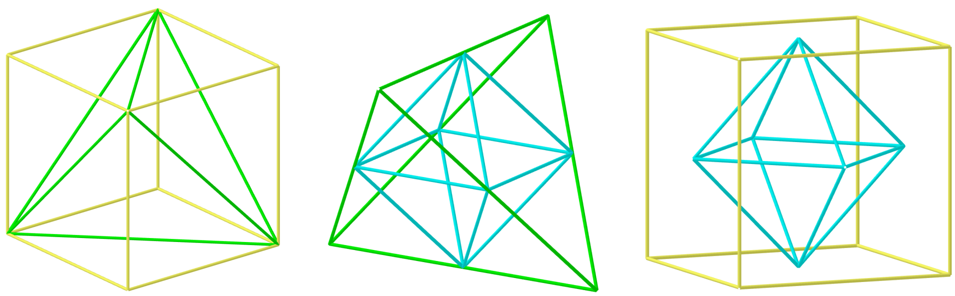


Proponemos tres construcciones parciales de poliedros inscritos. Puedes hacer cualquiera de estas, o combinar las tres para construir un omnipoliedro. Puedes utilizar palillos de madera y gomas elásticas. El icosaedro también puede estar hecho de cuerda una vez construido el octaedro. También se puede comprar un kit en Zometool.

El cubo, el tetraedro y el octaedro.

Construye un cubo. Añade una diagonal en cada una de las seis caras, construyendo un tetraedro: para ello, es necesario elegir diagonales cuyos extremos estén en cuatro de los ocho vértices del cubo, de manera que a cada uno de estos cuatro vértices se unan tres diagonales (hay dos formas de hacerlo.) Une los puntos medios de las aristas del tetraedro para construir un octaedro.



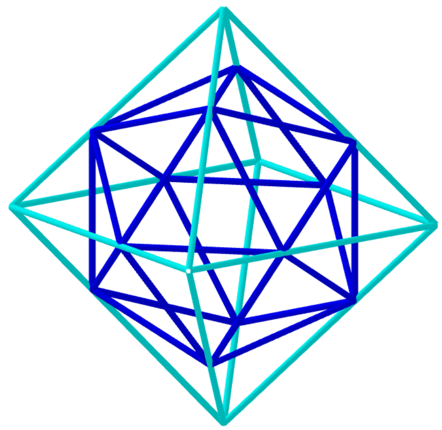


Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona. Calcula las longitudes de las aristas del tetraedro y del octaedro, en función de la del cubo.

Observa que las aristas del octaedro están en el centro de las caras del cubo, por lo que podemos ver que el octaedro es el dual del cubo. Obtienes el tetraedro dual si eliges las otras diagonales de las caras del cubo.

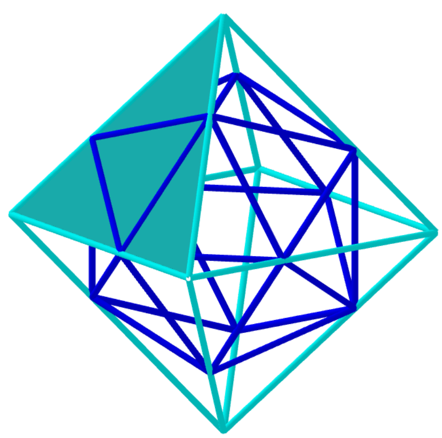
El icosaedro inscrito en el octaedro.

Un icosaedro regular se puede inscribir en un octaedro regular de modo que cada uno de los doce vértices del icosaedro se encuentre en una de las doce aristas del octaedro, y estos vértices dividen las aristas en una proporción áurea ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618...$ es la *proporción áurea*, dada por la ecuación $\frac{\phi}{1} = \frac{\phi+1}{\phi}$, o equivalentemente $\phi^2 = \phi + 1$),

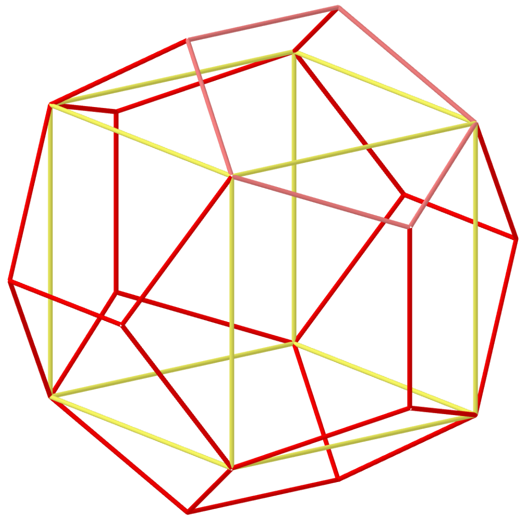


Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona.

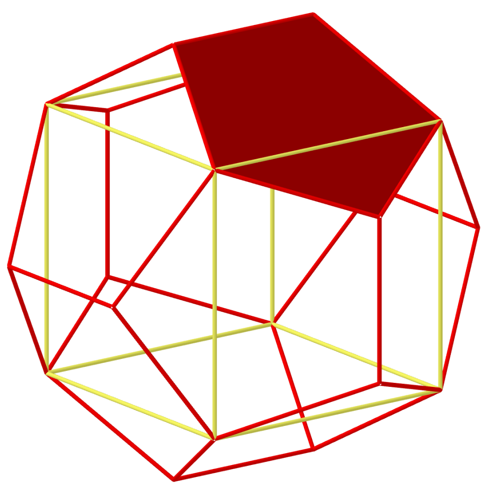
Indicación: Cada cara del octaedro contiene una cara triangular del icosaedro. Calcula la longitud de su lado. El resto de las aristas del icosaedro se encuentran en el interior del octaedro. Demuestra que su longitud es la misma que la de las aristas construidas anteriormente.



El dodecaedro circunscrito al cubo.



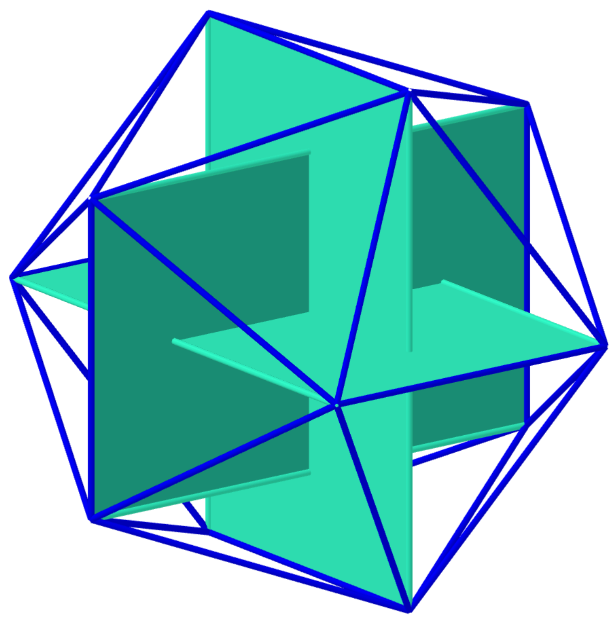
Toma un cubo. Sobre cada cara cuadrada, construye un “tejado” hecho de dos triángulos en lados opuestos y dos trapecios en lados opuestos, usando cinco palillos (primero construye los dos triángulos agregando dos palillos a cada uno de los dos lados opuestos, luego une los vértices libres con el palillo restante). Construye los tejados en cada una de las caras del cubo de manera que un trapecio se una a un triángulo. Si la longitud de las nuevas aristas es exactamente 1/ϕ de la arista del cubo, entonces el trapecio y el triángulo correspondiente alrededor de la arista común del cubo se alinearán perfectamente para formar un pentágono regular, y el resultado global será un dodecaedro regular.



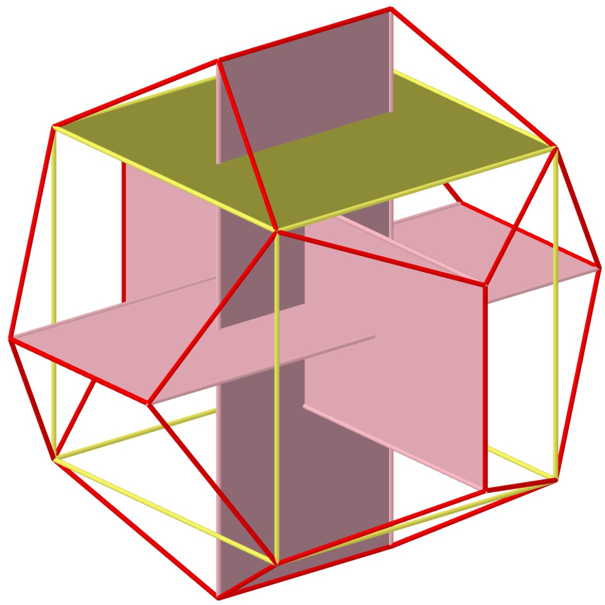
Dibuja esta construcción en papel, constrúyela con palillos y demuestra matemáticamente que funciona.

Retos adicionales

- Toma tres rectángulos áureos (en un *rectángulo áureo,* la longitud es ϕ veces la anchura). Corta una ranura en el centro de cada uno de ellos (del tamaño de la anchura de los rectángulos) y ensámblalos de manera que cada rectángulo quede perpendicular a los otros dos. Los doce vértices están dispuestos como en un icosaedro. Pruébalo y constrúyelo.
  Nota: La mayoría de las tarjetas de crédito y de visita son rectángulos áureos. Puedes usar estas tarjetas y un poco de hilo para hacer los bordes.



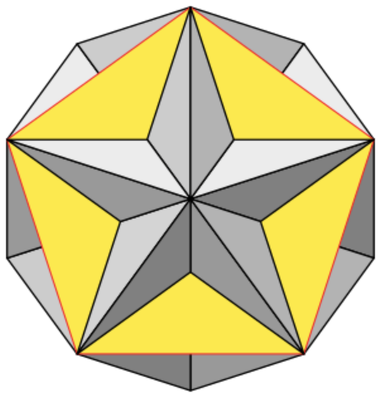
- Toma tres rectángulos cuya longitud sea ϕ^2 veces la anchura. Corta una ranura en el centro de cada uno de ellos y ensamblalos de manera que cada rectángulo quede perpendicular a los otros dos. Inserta esta construcción en el centro de un cubo de lado ϕ, manteniendo los rectángulos paralelos a las caras. Entonces, los doce vértices de los tres rectángulos, más los ocho vértices del cubo, forman el conjunto de vértices de un dodecaedro regular.



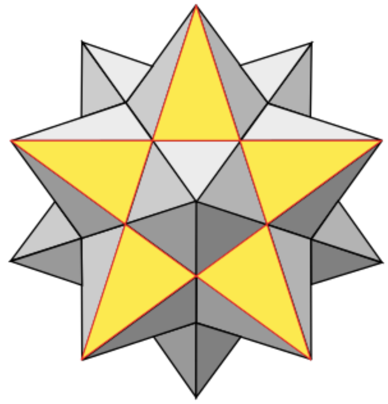
- Construye un modelo en el programa GeoGebra calculando las coordenadas cartesianas de todos los vértices. Solución:
  - Cubo: $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$
  - Tetraedro: el subconjunto de vértices del cubo, tal que hay un número par de signos menos.
  - Octaedro: $(\pm\ 1, 0, 0)$, $(0, \pm\ 1, 0)$, $(0, 0, \pm\ 1)$
  - Icosaedro: $\left(\pm\frac{1}{\phi}, 0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right)\right)$, y sus permutaciones cíclicas, a saber $\left(0, \pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}\right)$ y $\left(\pm\left(1-\frac{1}{\phi}\right), \pm\frac{1}{\phi}, 0\right)$.
  - Dodecaedro: Los del cubo, junto con $\left(\pm\frac{1}{\phi},\ 0,\ \ \pm\ \phi\right)$, y sus permutaciones cíclicas, a saber $\left(\ 0, \pm\ \phi, \pm\frac{1}{\phi},\right)$ y $\left(\pm\ \phi, \pm\frac{1}{\phi},\ 0\right)$

Poliedro regular	Número de caras	Número de vértices	Número de aristas	Longitud de la arista
Icosaedro	20	12	30	$\frac{1}{\phi^2}$
Octaedro	8	6	12	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tetraedro	4	4	6	$\sqrt{2}$
Cubo	6	8	12	1
Dodecaedro	12	20	30	$\frac{1}{\phi}$

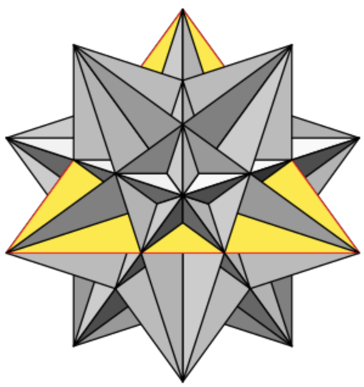
Los poliedros de Kepler-Poinsot



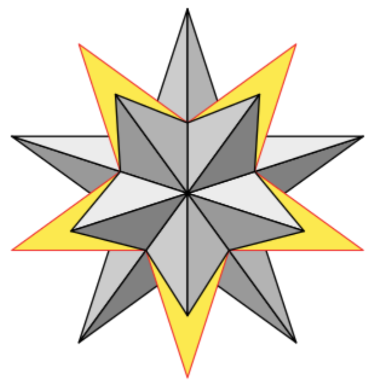
Gran dodecaedro



Pequeño dodecaedro estrellado



Gran icosaedro



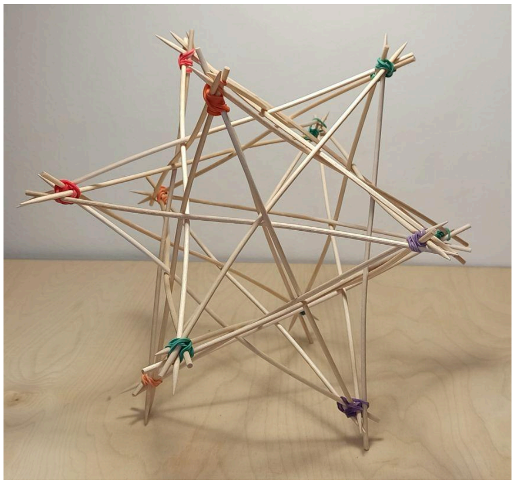
Gran dodecaedro estrellado

Hay cuatro poliedros de Kepler-Poinsot y todos ellos no son convexos. Parecen tener muchas caras, aristas y vértices. Por ejemplo, para construir un *pequeño dodecaedro estrellado* de cartón es necesario cortar y pegar 60 caras. Este poliedro tiene 90 aristas y 32 vértices. Por tanto, la relación de Euler vuelve a ser cierta.

Pero los matemáticos (y las matemáticas) tienen mucha imaginación y creatividad. De hecho, mira nuevamente el pequeño dodecaedro estrellado. Fíjate en los cinco triángulos amarillos. Todos se encuentran en el mismo plano. Si vamos a completar la parte media que falta (que tiene forma de pentágono, lo que tenemos es una estrella regular de cinco puntas, llamada *pentagrama*. Por lo tanto, se puede considerar la parte media de la estrella, no como faltante, sino como dentro del poliedro. Lo mismo ocurre con todas las demás caras pequeñas. En grupos de cinco, pertenecen a otros pentagramas, cuya parte media se encuentra dentro del poliedro. Como empezamos con 60 caras, el resultado será doce pentagramas. Así, podemos considerar que este pequeño dodecaedro estrellado tiene doce (de ahí el nombre) *caras generalizadas* en forma de pentagramas, ¡que pueden cruzarse! En matemáticas tenemos la posibilidad de cambiar la definición de poliedro para permitir tal construcción, y entonces se puede estudiar qué sucede con otras propiedades, como la relación de Euler, con esta nueva definición.

Te invitamos a observar de manera similar los otros tres poliedros de Kepler-Poinsot. Los dos *dodecaedros estrellados* Tienen doce caras, con forma de pentagramas. El *gran dodecaedro* tiene doce caras pentagonales que se cruzan. El *gran icosaedro* tiene veinte caras triangulares que se cruzan.

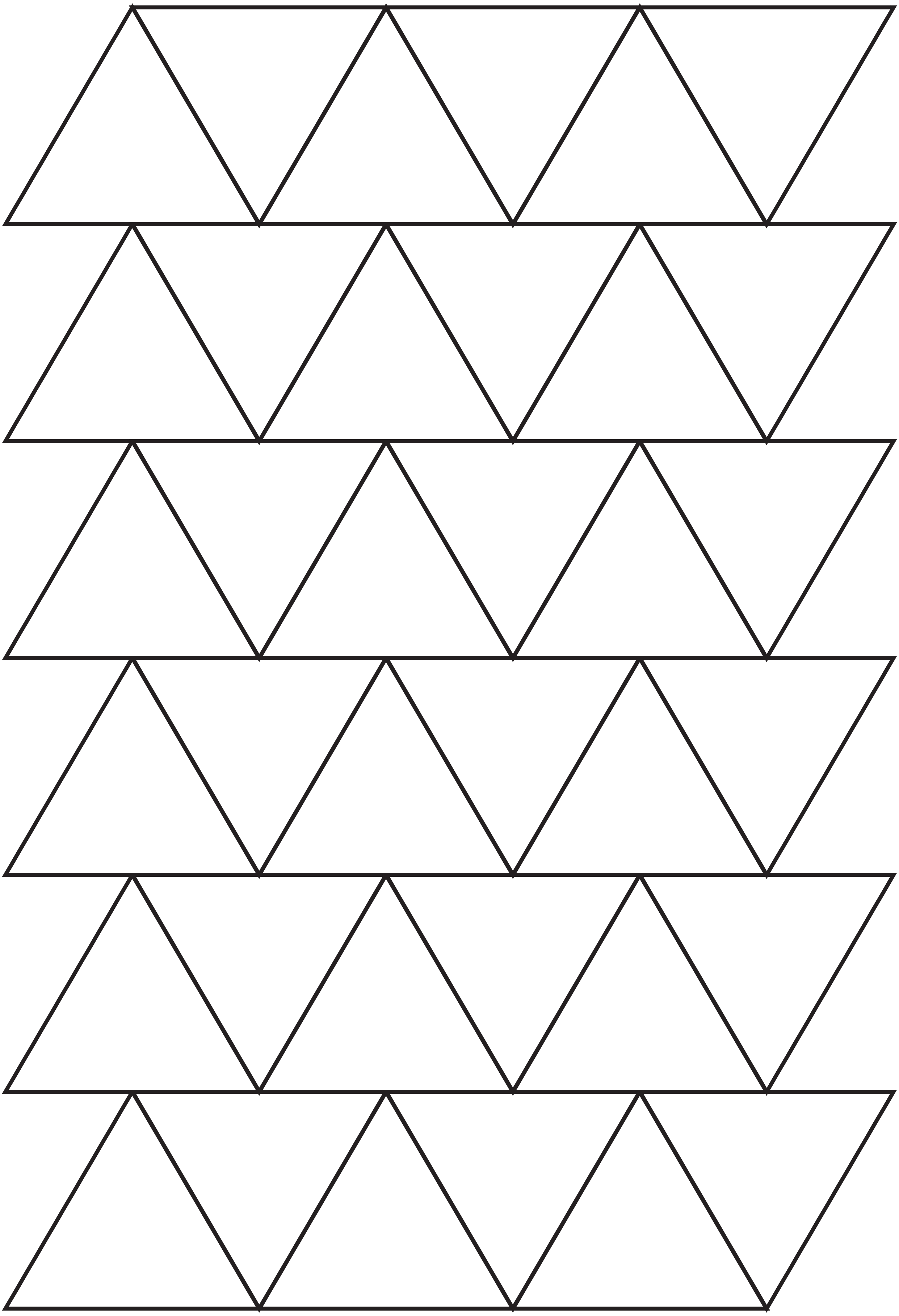
Puedes intentar construir algunos de estos poliedros con palillos y/o cartulina.

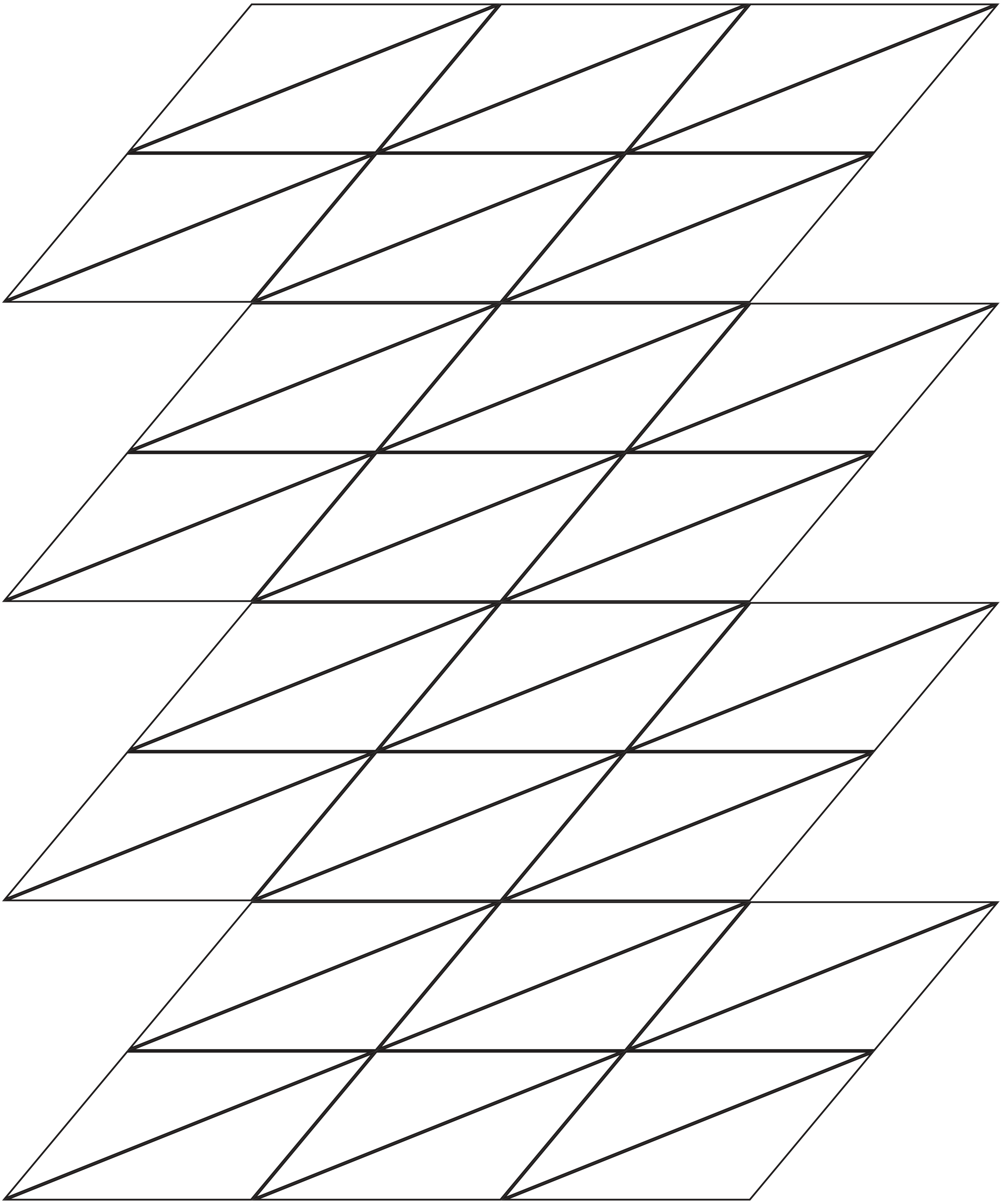


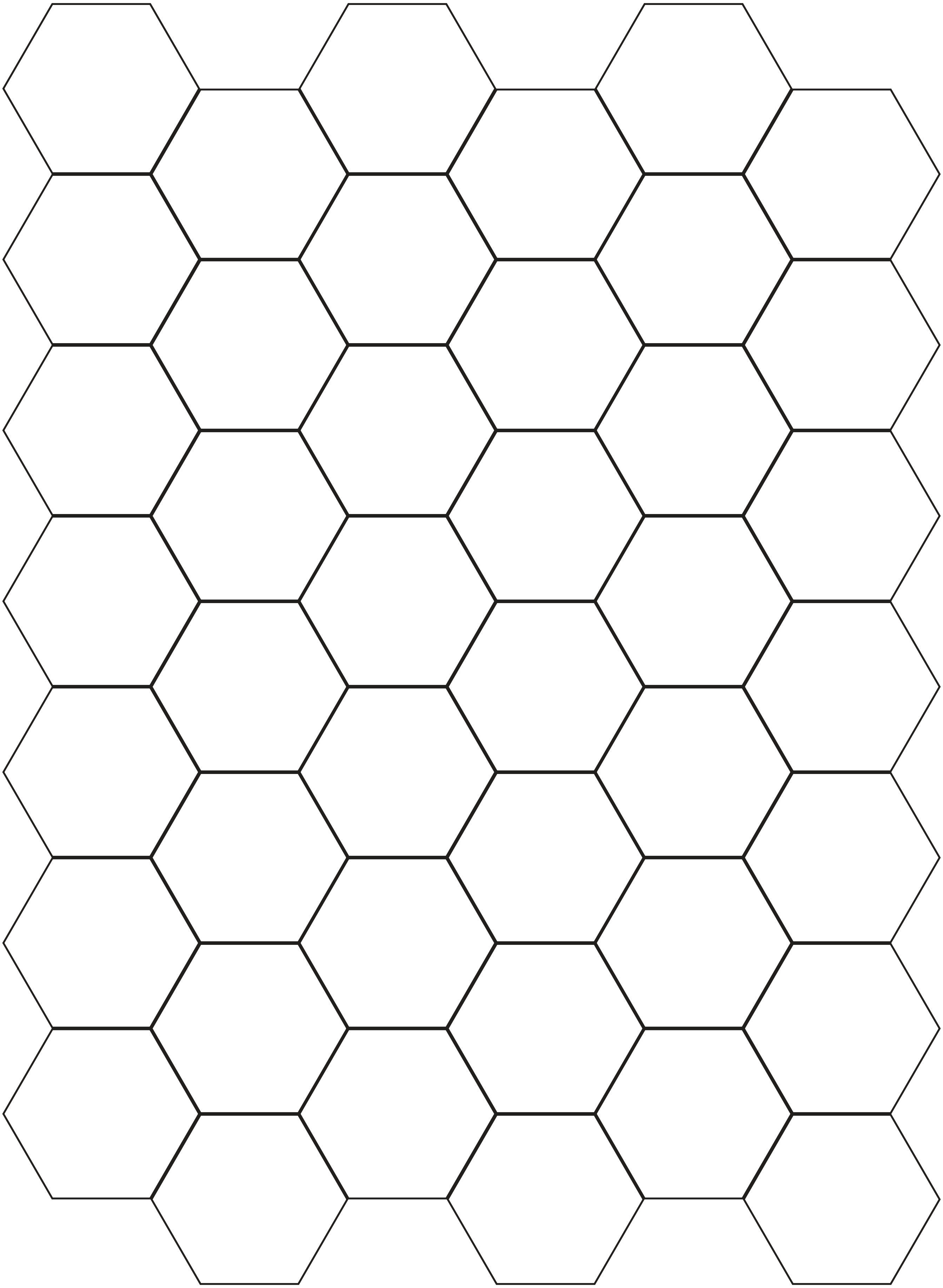
Otros recursos

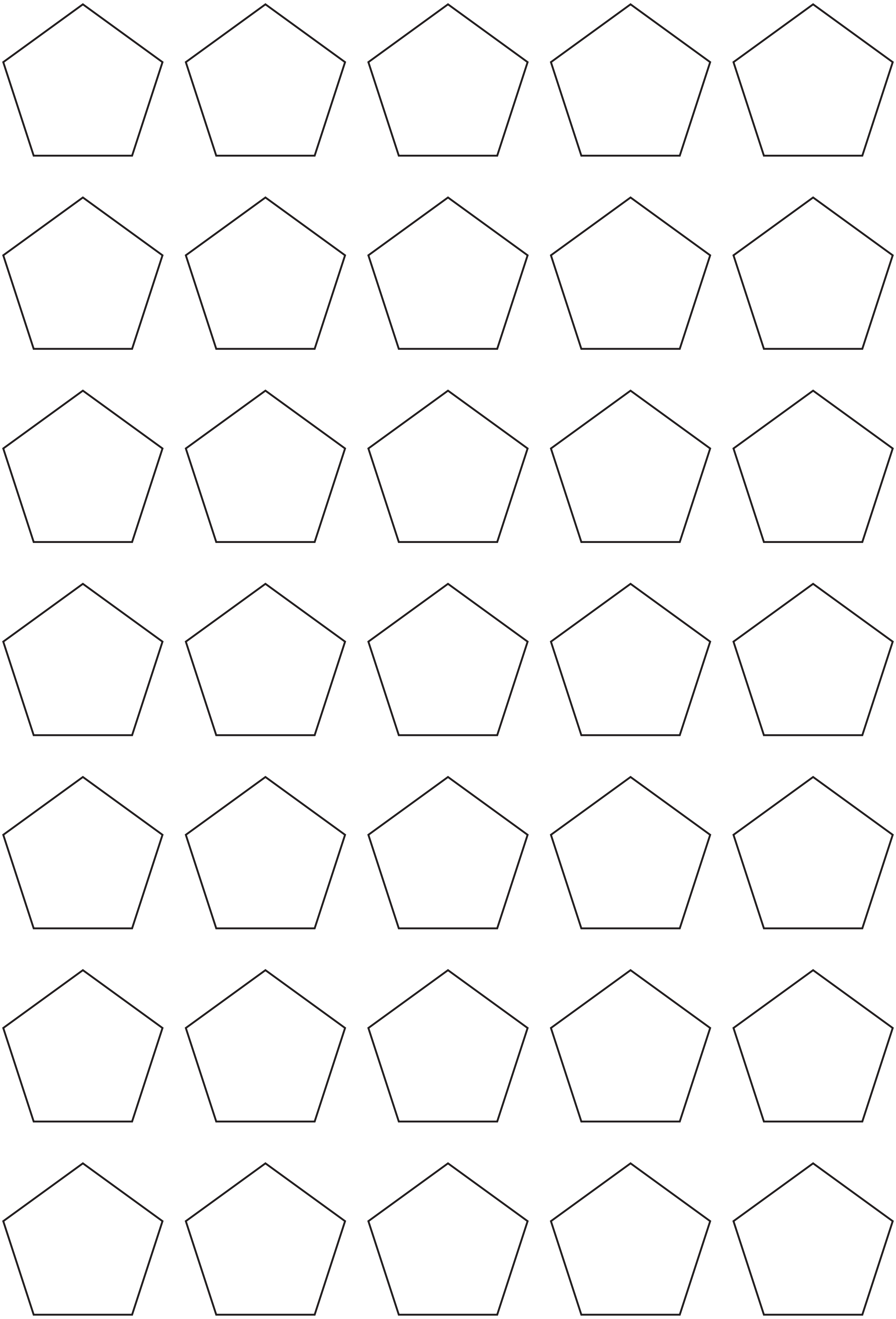
- Puedes leer una historia de fantasía sobre poliedros en el libro interactivo Mathina, con aplicaciones y películas interactivas.
- La asociación portuguesa Atractor tiene muchas animaciones e imágenes de poliedros (y sus redes, propiedades, etc) en su sitio web.
- Zometool. La obsesión de Kepler. https://www.zometool.com/products/keplers-obsession.html

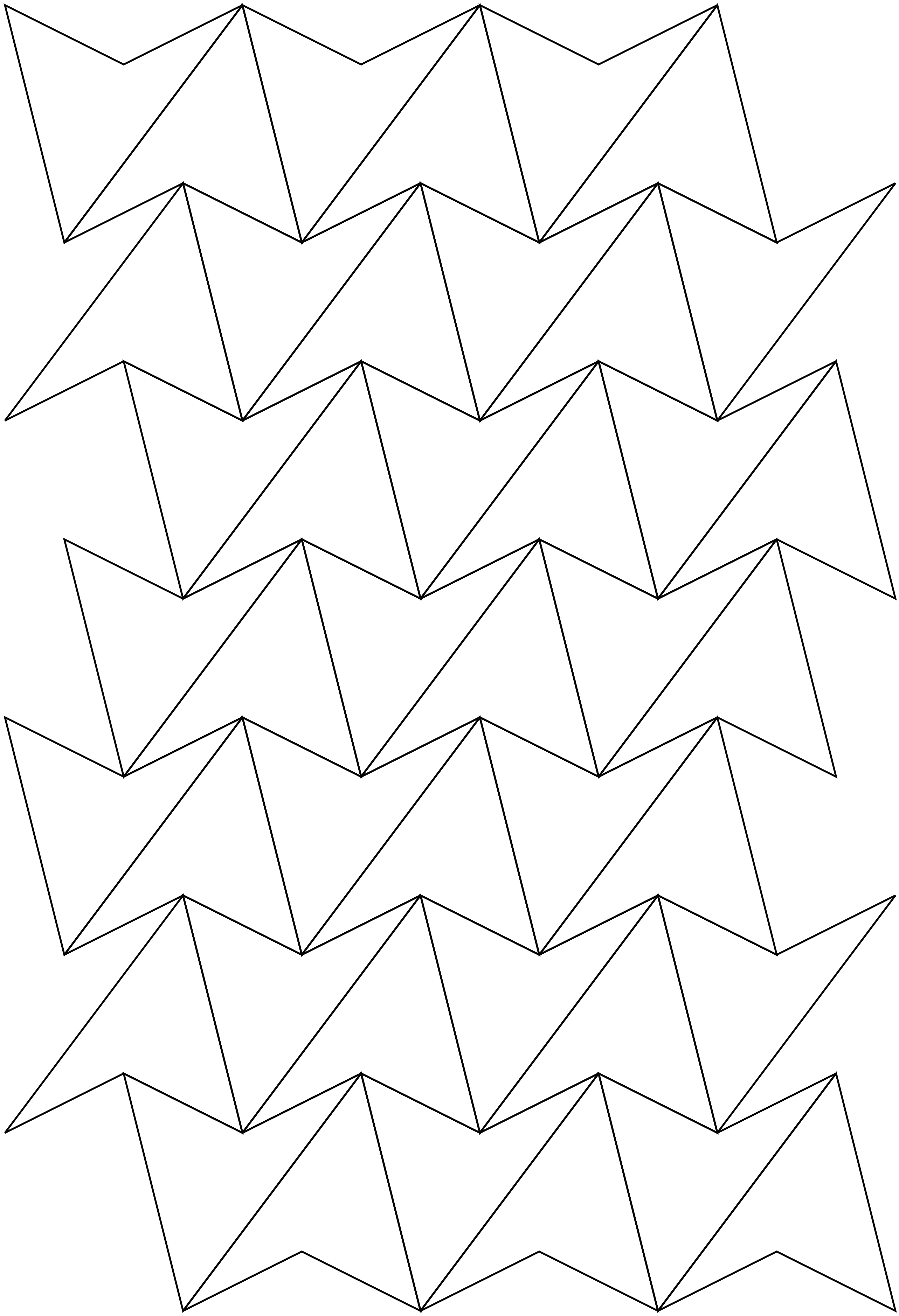
¡Crea y comparte!
Comparta los hallazgos de los participantes usando los hashtags. **#idm314poliedros** y **#idm314**.

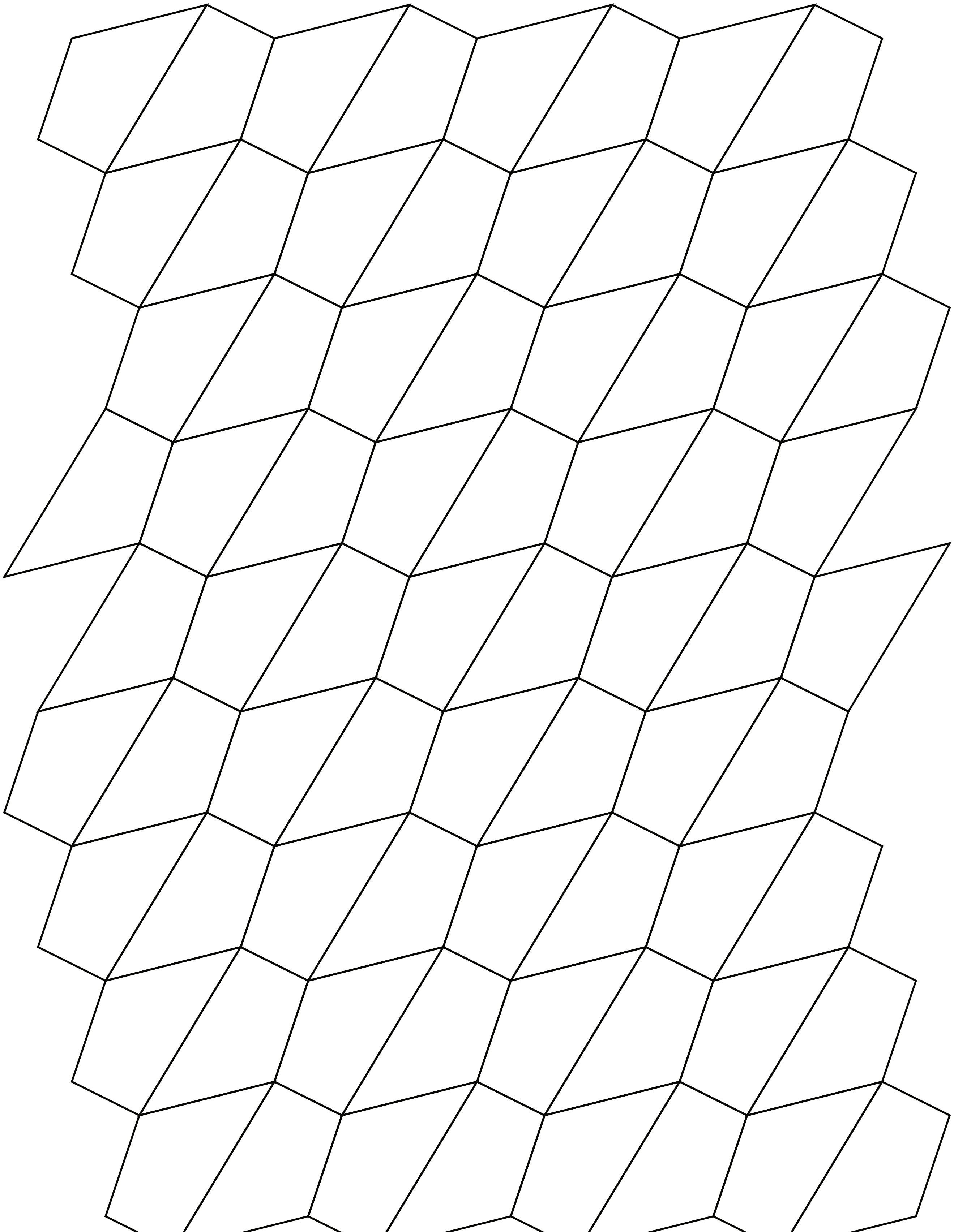


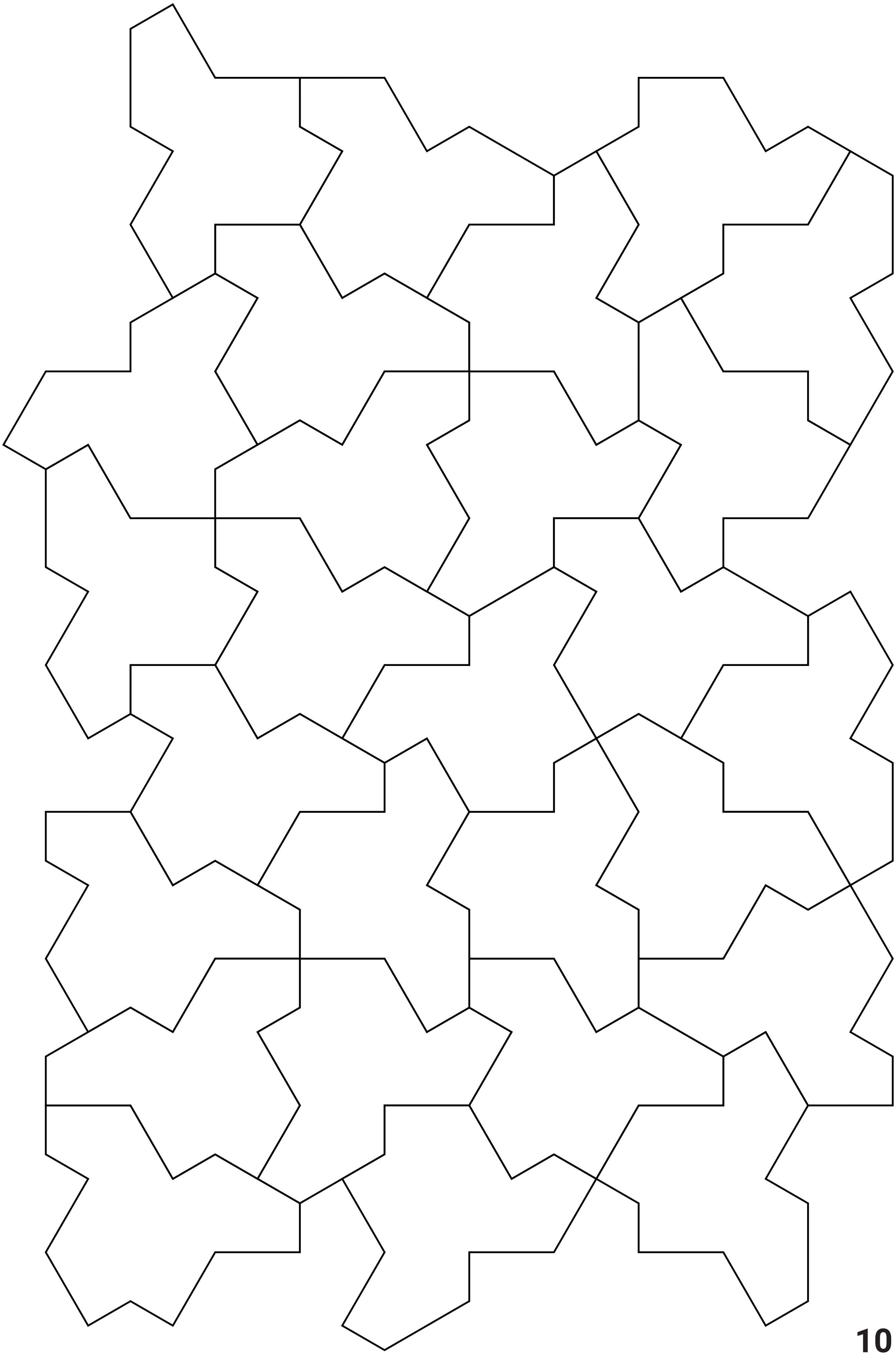


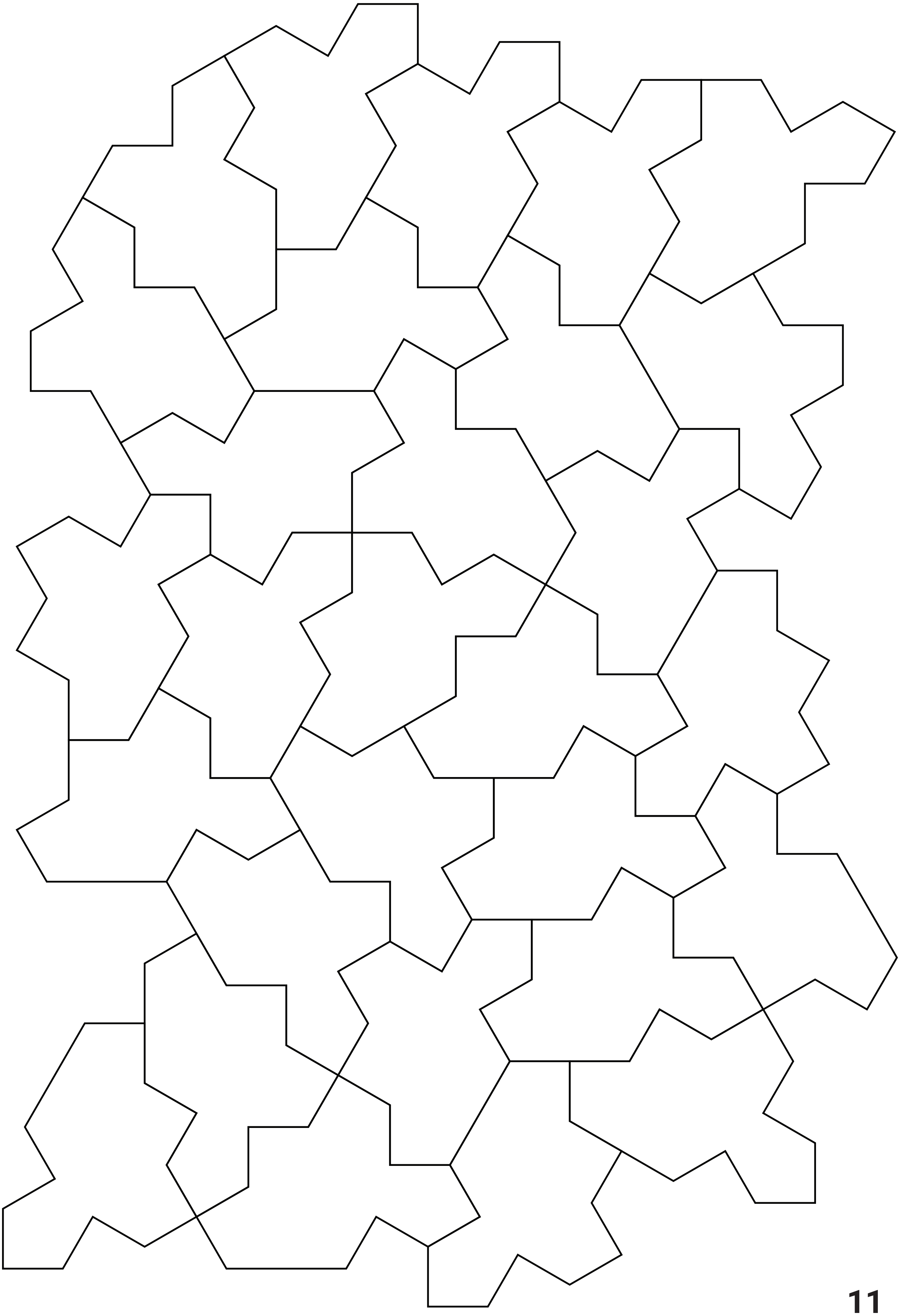












INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS
MARCH 14